

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN ĐỨC

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC NỘI TIẾNG VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Văn Ngọc

Thái Nguyên - 2011

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Văn Ngọc

Phản biện 1: GS. TSKH. Hà Huy Khoái - Viện Toán học.

Phản biện 2: PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhân - Trường Đại học
Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Luận văn được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên
Ngày 09 tháng 09 năm 2011

Có thể tìm hiểu tại
Thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

Mở đầu	5
Chương 1. Tam giác	8
1.1. Ký hiệu và hệ thức cơ bản trong tam giác	8
1.2. Định lý Thales và định lý Pythagoras	8
1.2.1. Định lý Thales	8
1.2.2. Định lý Pythagoras	11
1.3. Định lý hàm số sin và định lý hàm số cosin	13
1.3.1. Định lý hàm số sin	13
1.3.2. Định lý hàm số cosin	13
1.3.3. Bài toán	14
1.4. Định lý Stewart và áp dụng	15
1.4.1. Định lý Stewart	15
1.4.2. Định lý đường trung tuyến	16
1.4.3. Định lý về đường phân giác	17
1.4.4. Công thức góc chia đôi	18
1.5. Công thức về diện tích của tam giác và áp dụng	21
1.5.1. Công thức về diện tích của tam giác	21
1.5.2. Tỷ số diện tích hai tam giác	23
1.5.3. Bài toán	23
1.6. Tam giác Pedal	28
1.6.1. Pedal bất kỳ	28
1.6.2. Pedal trực tâm	29
1.6.3. Pedal tâm nội tiếp	32
Chương 2. Tứ giác	35
2.1. Ký hiệu và hệ thức cơ bản	35
2.2. Định lý Ptolemy và các mở rộng	38

2.2.1.	Định lý Ptolemy	38
2.2.2.	Bất đẳng thức Ptolemy	39
2.2.3.	Định lý Bretschneider	40
2.2.4.	Định lý Casey	41
2.2.5.	Định lý Carnot	42
2.2.6.	Bài toán	42
2.3.	Tứ giác đặc biệt	46
2.3.1.	Tứ giác nội tiếp đường tròn	46
2.3.2.	Tứ giác ngoại tiếp đường tròn	50
2.3.3.	Tứ giác đồng thời nội và ngoại tiếp	55
2.3.4.	Tứ giác với những đường chéo vuông góc	56
2.4.	Công thức diện tích của tứ giác	57
2.4.1.	Công thức diện tích của tứ giác nội tiếp	57
2.4.2.	Công thức diện tích của tứ giác ngoại tiếp	58
2.4.3.	Công thức diện tích của tứ giác đồng thời nội tiếp và ngoại tiếp	58
2.4.4.	Công thức diện tích của tứ giác lồi bất kỳ	59
2.5.	Tứ giác điều hoà và tính chất	60
2.5.1.	Hàng điểm điều hoà	60
2.5.2.	Tứ giác điều hoà	60
2.5.3.	Tính chất của tứ giác điều hoà	61
2.5.4.	Bài toán	63

Chương 3. Các đường thẳng đồng quy 67

3.1.	Định lý Ceva	67
3.2.	Một số mở rộng của định lý Ceva trong mặt phẳng	68
3.2.1.	Định lý Ceva dạng sin	68
3.2.2.	Mở rộng định lý Ceva trong mặt phẳng	69
3.3.	Mở rộng định lý Ceva trong không gian	71
3.3.1.	Định lý Ceva trong không gian	71
3.3.2.	Hệ quả của định lý Ceva trong không gian	72
3.4.	Các điểm đặc biệt trong tam giác	73
3.4.1.	Các điểm đặc biệt quen biết	73

3.4.2. Một số điểm đặc biệt khác	73
3.5. Bài toán	75
Chương 4. Các điểm thẳng hàng	83
4.1. Định lý Menelaus	83
4.2. Mở rộng định lý Menelaus trong mặt phẳng	84
4.2.1. Mở rộng định lý Menelaus trong tam giác	84
4.2.2. Mở rộng định lý Menelaus theo diện tích	84
4.2.3. Mở rộng Định lý Menelaus trong tứ giác	85
4.3. Mở rộng định lý Menelaus trong không gian	86
4.3.1. Mặt phẳng phân giác góc nhị diện	86
4.3.2. Định lý Menelaus trong không gian	86
4.4. Định lý Desargues và Định lý Pappus	87
4.4.1. Định lý Desargues	87
4.4.2. Định lý Pappus	88
4.5. Tam giác phối cảnh	88
4.6. Bài toán	89
Chương 5. Đường tròn	95
5.1. Phương tích của một điểm - Trục đẳng phương	95
5.1.1. Định lý về các dây cung cắt nhau	95
5.1.2. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn	95
5.1.3. Trục đẳng phương và tâm đẳng phương	99
5.2. Định lý Euler	100
5.2.1. Đường thẳng Euler	100
5.2.2. Đường tròn Euler	102
5.2.3. Công thức Euler	103
5.3. Đường tròn Apolonius	105
5.4. Định lý Simson	108
5.5. Định lý Steiner	111
5.5.1. Đường thẳng Steiner	111
5.5.2. Định lý Steiner	111
5.6. Định lý Pithot	113

5.7. Định lý Miquel	113
5.8. Định lý Brianchon	114
5.9. Định lý Pascal và Định lý Newton	115
5.9.1. Định lý Pascal	115
5.9.2. Định lý Newton	117
5.10. Định lý The'bault	117
Kết luận	119

Mở đầu

Các định lý Thales (Talet), Pythagoras (Pitago), định lý về đường phân giác, định lý đường trung tuyến, định lý hàm số cosin, định lý hàm số sin... là những định lý cơ bản của hình học phẳng đã được giới thiệu trong sách giáo khoa hình học bậc phổ thông ở hầu hết các quốc gia.

Nhiều tính chất đẹp và quan trọng khác của hình học phẳng được giới thiệu chủ yếu dưới dạng các bài toán nâng cao, hay các bài toán của các kỳ Olympic. Để giải các bài toán này thường phải vận dụng các định lý như định lý Ptolemy (Ptôlêmê) về tứ giác nội tiếp, định lý Ceva (Xêva) về các đường thẳng đồng quy trong tam giác, định lý Menelaus (Mênêlauys) về các điểm thẳng hàng, định lý Simson (Simson), định lý Euler (Ôle), định lý Brianchon, định lý Newton (Niuton)...

Các tính chất này rải rác được giới thiệu trong các tài liệu dành cho các học sinh giỏi. Nhiều chuyên gia và tài liệu nước ngoài đã gọi các định lý nói trên là **"Famous geometry theorems" - "Các định lý hình học nổi tiếng"**. Hiện nay tài liệu bằng Tiếng Việt về các định lý hình học nổi tiếng chưa có nhiều và còn tản mạn. Cần thiết phải giới thiệu các định lý trên và những áp dụng của chúng một cách đầy đủ hơn.

Vì vậy, việc tìm hiểu sâu thêm và giới thiệu **Các định lý hình học nổi tiếng** là cần thiết cho công việc học tập và giảng dạy toán học ở bậc phổ thông. Bản luận văn **"Một số định lý hình học nổi tiếng và áp dụng"** được tiến hành vào giữa năm 2010 chủ yếu dựa trên các tài liệu [3,7-9], trong đó tài liệu [3] chúng tôi mới được làm quen từ tháng 3 năm 2011.

Bản luận văn **"Một số định lý hình học nổi tiếng và áp dụng"** gồm có: Mở đầu, năm chương nội dung, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Tam giác.

Chương này trình bày các định lý cơ bản của hình học phẳng đã được dạy ở bậc trung học cơ sở và trung học phổ thông như định lý Thales, định lý Pythagoras, định lý đường phân giác, định lý Stewart, định lý Appollonius-Pappus, định lý hàm số sin, hàm số cosin, các công thức về diện tích tam giác...Khác với nhiều tài liệu về hình học sơ cấp, bản luận văn này đã giới thiệu cách chứng minh đơn giản các định lý Thales, Pythagoras và định lý Stewart. Chương này còn trình bày về tam giác pedal, trong đó pedal trực tâm là sự tìm tòi của tác giả. Chương này cũng trình bày 17 bài toán về áp dụng các định lý nói trên.

Chương 2 . Tứ giác.

Chương này trình bày một số định lý liên quan đến tứ giác và các bài toán áp dụng. Đó là định lý Ptolemy, định lý Bretschneider, định lý Casey, định lý Canot. Chương này còn đề cập đến tứ giác đặc biệt như tứ giác nội tiếp, tứ giác ngoại tiếp, tứ giác đồng thời ngoại và nội tiếp, tứ giác điều hoà, trong đó 10 tính chất về tứ giác ngoại tiếp là sự tìm tòi của tác giả bản luận văn. Trong chương này tôi giới thiệu 20 bài toán áp dụng các định lý liên quan đến tứ giác.

Chương 3. Các đường thẳng đồng quy.

Chương này trình bày các kiến thức về đường thẳng đồng quy, đặc biệt là định lý Ceva với các mở rộng trên mặt phẳng và trong không gian. Chương này cũng giới thiệu một số điểm đặc biệt trong tam giác được tạo nên bởi các đường thẳng đặc biệt đồng quy. Trong chương này trình bày 11 bài toán liên quan đến các đường thẳng đồng quy, trong đó đa phần được trích ra từ các đề thi vô địch Quốc tế và Việt Nam.

Chương 4. Các điểm thẳng hàng.

Chương này trình bày các kiến thức liên quan đến các điểm thẳng hàng, đặc biệt là định lý Menelaus và các mở rộng trong tứ giác, trong không gian. Chương này còn giới thiệu định lý Desargues, định lý Pappus và 10 bài toán liên quan đến các điểm thẳng hàng.

Chương 5. Đường tròn.

Chương này giới thiệu một số định lý hình học nổi tiếng liên quan đến đường tròn như định lý Euler về đường tròn Euler, định lý Simson về đường thẳng Simson, định lý Steiner, định lý Newton, định lý Brianchon và một số định lý khác. Trong chương đã trình bày 16 bài toán liên quan đến đường tròn.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Ngọc - Viện Toán Học Hà Nội. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Thầy hướng dẫn, tới các thầy cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đồng thời tác giả xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K3 - Trường Đại học Khoa học đã động viên, giúp đỡ trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tác giả xin cảm ơn Sở Giáo dục - Đào tạo tỉnh Hà Giang, Ban Giám hiệu và đồng nghiệp của trường THPT Hùng An, trường THPT Đồng Yên - Huyện Bắc Quang đã tạo điều kiện về mọi mặt để tác giả được tham gia học tập và hoàn thành khoá học.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 06 năm 2011

Tác giả

Vũ Văn Đức

Chương 1

Tam giác

1.1. Kí hiệu và hệ thức cơ bản trong tam giác

Kí hiệu $\triangle ABC$ là tam giác ABC với các đỉnh là A, B, C . Để thuận tiện, độ lớn của các góc ứng với các đỉnh A, B, C cũng được kí hiệu tương ứng là A, B, C .

Độ dài các cạnh của tam giác: $BC = a, CA = b, AB = c$.

Nửa chu vi của tam giác: $p = \frac{a + b + c}{2}$.

Đường cao với các cạnh: h_a, h_b, h_c .

Đường trung tuyến với các cạnh: m_a, m_b, m_c .

Đường phân giác với các cạnh: l_a, l_b, l_c .

Bán kính đường tròn ngoại tiếp R , bán kính đường tròn nội tiếp r .

Bán kính đường tròn bàng tiếp các cạnh: R_a, R_b, R_c .

Diện tích tam giác ABC : $S = S_{ABC}$ hay $[ABC]$.

Hệ thức về góc:

$$A + B + C = 180^\circ(\pi).$$

Hệ thức về cạnh:

$$|b - c| < a < b + c; \quad |c - a| < b < c + a; \quad |a - b| < c < a + b.$$

Công thức tính diện tích tam giác. Diện tích tam giác bằng một nửa tích của một cạnh với đường cao tương ứng:

$$[ABC] = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

1.2. Định lý Thales và định lý Pythagoras

1.2.1. Định lý Thales

Thales và Pythagoras là hai nhà toán học xa xưa nhất mà lịch sử Toán học còn ghi lại được. Thales sinh trước Pythagoras nửa thế kỷ, từng là thầy dạy của Pythagoras và đã đánh giá rất cao tài năng của cậu học trò nhỏ tuổi. Thales sinh khoảng năm 620 và mất khoảng năm

546 trước Công nguyên (TCN). Ông sinh ra ở thành phố Miletus giàu có của xứ Ionia thịnh vượng ven biển phía tây Tiểu Á. Thales đã đến Ba-bi-lon, Ai Cập và thu thập được từ những xứ sở ấy nhiều kiến thức toán học. Ông được coi là người sáng lập nền toán học Hy Lạp.

Thales là nhà buôn, nhà chính trị và triết học, nhà toán học và thiên văn học. Ông là người đầu tiên trong Lịch sử toán học đưa ra những phép chứng minh. Ông đã chứng minh được định lý về sự tạo thành các đoạn thẳng tỉ lệ (Định lý Thales) và các định lý về hai góc đối đỉnh, hai góc ở đáy của một tam giác cân, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Thales đã đo được chiều cao của các Kim Tự Tháp bằng cách đo bóng nắng của chúng, tính được khoảng cách từ các con tàu đến bến cảng nhờ các tam giác đồng dạng. Thales cũng là người đầu tiên trong Lịch sử toán học đoán trước được các ngày Nhật thực: Hiện tượng xảy ra đúng vào ngày mà ông dự đoán, ngày 28 tháng 05 năm 585 TCN, trong sự khâm phục của mọi người.

Định nghĩa 1.1. Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ thức

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \quad \text{hay} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}. \quad (1.1)$$

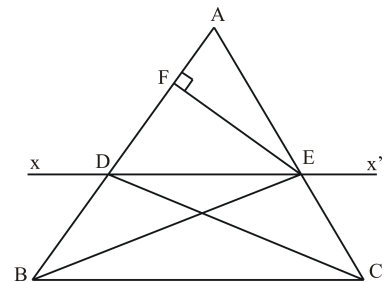
Định lý 1.1. (Định lý Thales trong tam giác). Nếu một đường cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh còn lại những đoạn thẳng tỉ lệ.

Chứng minh.

Xét tam giác ABC và giả sử đường thẳng $xx' // BC$, cắt cạnh AB và AC tương ứng tại D và E . Ta sẽ chứng minh

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}. \quad (1.2)$$

Vì DE song song với BC , nên diện tích tam giác DEB bằng diện tích tam giác



Hình 1.1

DEC . Trong tam giác ABE kẻ đường cao EF . Khi đó

$$\frac{[ADE]}{[BDE]} = \frac{\frac{1}{2}AD.EF}{\frac{1}{2}BD.EF} = \frac{AD}{BD}. \quad (1.3)$$

Tương tự ta có

$$\frac{[ADE]}{[BDE]} = \frac{AE}{CE}. \quad (1.4)$$

Từ (1.3) và (1.4) suy ra hệ thức (1.2) (đpcm).

Hệ quả 1.1. Trong tam giác ABC , nếu đường thẳng xx' cắt AB ở D và cắt cạnh AC ở E , thì

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}; \quad \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}. \quad (1.5)$$

Định lý 1.2. (Định lý Thalet đảo) Nếu một đường cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

Chứng minh. Giả sử đường thẳng xx' cắt các cạnh AB, AC của tam giác ABC theo thứ tự tại D và E , sao cho $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

Ta phải chứng minh $DE \parallel BC$.

Qua D kẻ đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AC tại điểm E' . Theo định lý thuận ta có $\frac{AB}{DB} = \frac{AE'}{E'C} \Rightarrow \frac{AE'}{E'C} = \frac{AE}{EC}$

$$\Leftrightarrow \frac{AE'}{E'C} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1 \Leftrightarrow \frac{AE' + E'C}{E'C} = \frac{AE + EC}{EC} \Leftrightarrow \frac{AC}{E'C} = \frac{AC}{EC},$$

hay $E'C = EC$, tức là $E \equiv E'$. Do đó $DE \parallel BC$ (đpcm).

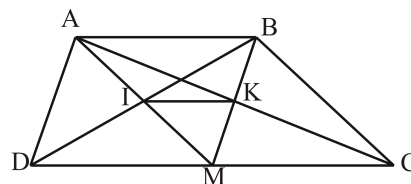
Hệ quả 1.2. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh (hoặc phần kéo dài của hai cạnh) của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỷ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Hệ quả 1.3. Nhiều đường thẳng song song định ra trên hai cát tuyến những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

Bài toán 1.1. Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$. M là trung điểm của CD . Gọi I là giao điểm của AM và BC , K là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng $IK \parallel AB$.

Lời giải. Ta có $\triangle AIB \sim \triangle MID$ (Do $AB \parallel MD$, $\widehat{AIB} = \widehat{MID}$) $\Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{MD}{AB}$.

Mặt khác $MD = MC$, $AB \parallel MC$
(giả thiết)
 $\Rightarrow \frac{KM}{KB} = \frac{MC}{AB}$ nên $\frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB}$.
 $\Rightarrow IK \parallel AB$ (Theo Thalet đảo ta suy ra điều phải chứng minh).



Hình 1.2

1.2.2. Định lý Pythagoras

Định lý này mang tên nhà triết học và nhà toán học Hy Lạp sống vào thế kỷ thứ VI TCN, mặc dù định lý này đã được biết bởi các nhà toán học Ấn Độ, Hy Lạp, Trung Quốc và Babylon từ nhiều thế kỷ trước. Hai cách chứng minh cổ nhất của Định lý Pythagoras được cho là nằm trong quyển "Chu bễ toán kinh" khoảng 500 đến 200 TCN và "Các nguyên tố" của Euclid khoảng 300 năm TCN.

Định nghĩa 1.2. Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông. Cạnh đối diện với góc vuông được gọi là cạnh huyền, hai cạnh kề góc vuông được gọi là hai cạnh kề hay hai cạnh góc vuông.

Cách phát biểu của Euclid: Tổng diện tích của hai hình vuông vẽ trên hai cạnh góc vuông (hai cạnh kề góc vuông) bằng diện tích của hình vuông vẽ trên cạnh huyền.

Dùng đại số sơ cấp hay hình học đại số có thể viết định lý Pythagoras dưới dạng hiện đại, chú ý rằng diện tích của hình vuông bằng bình phương độ dài cạnh của hình vuông đó.

Định lý 1.3. (Định lý Pythagoras thuận) Trong tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài hai cạnh góc vuông. Nếu tam giác ABC vuông tại A thì $a^2 = b^2 + c^2$.

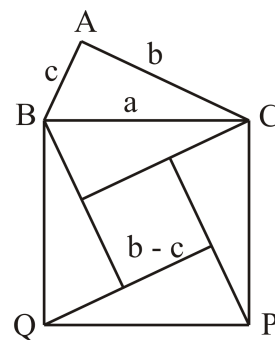
Chứng minh.

Cách 1. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $b \geq c$. Dựng hình vuông $BCPQ$ có độ dài các cạnh bằng a , dựng vào bên trong hình vuông 4 tam giác vuông bằng tam giác vuông ABC .

Ta thấy diện tích của hình vuông cạnh a bằng tổng diện tích của 4 tam giác vuông bằng tam giác ABC với diện tích của hình vuông cạnh $(b - c)$.

$$\text{Vậy ta có } a^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot bc + (b - c)^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2 = b^2 + c^2.$$

Cách 2. Cách chứng minh cổ điển



Hình 1.3

Bổ đề 1.1. Trong tam giác vuông, bình phương độ dài mỗi cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền với độ dài hình chiếu của cạnh góc vuông đó lên cạnh huyền $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$.

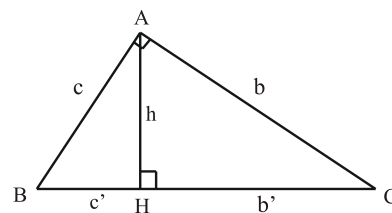
Chứng minh.

Vì hai tam giác vuông ABC và HBA có $\widehat{ABC}$ chung nên $\triangle ABC \sim \triangle HBA$. Suy ra $\frac{AB}{HB} = \frac{BC}{AB}$ hay $AB^2 = HB \cdot BC$. Vậy $c^2 = ac'$.

Chứng minh tương tự, ta có $\triangle ABC \sim \triangle HAC$. Suy ra $b^2 = ab'$.

Theo bổ đề trên ta có $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$.

Cộng từng vế hai đẳng thức trên, ta được $b^2 + c^2 = a(b' + c') = a^2$.



Hình 1.4

Định lý 1.4. (Định lý Pythagoras đảo) Nếu bình phương độ dài một cạnh của tam giác bằng tổng bình phương độ dài của hai cạnh kia, thì góc của tam giác nằm giữa hai cạnh đó bằng góc vuông. Nếu trong tam giác ABC mà $a^2 = b^2 + c^2$ thì $\hat{A} = 90^\circ$.

Kết luận: Một tam giác là vuông khi và chỉ khi bình phương độ dài của một cạnh bằng tổng bình phương độ dài của hai cạnh kia.

1.3. Định lý hàm số sin và định lý hàm số cosin

1.3.1. Định lý hàm số sin

Định lý 1.5. Trong tam giác ABC có các hệ thức

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \quad (1.6)$$

Chứng minh. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Vì các góc A, B, C có vai trò như nhau, nên chúng ta chỉ chứng minh (1.6) cho góc A .

Vẽ đường kính BA' .

a) Nếu $A = 90^\circ$, thì $\sin A = 1$, $a = 2R$, nên (1.6) đúng.

b) Xét trường hợp A nhọn.

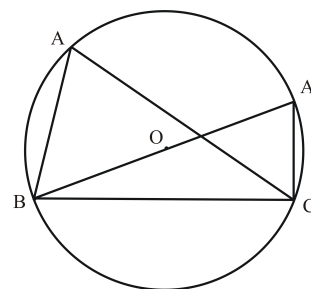
Ta có $A = A'$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung nhỏ BC) do đó:

$$\sin A = \sin A' \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

c) Xét trường hợp A tù.

Khi đó $A + A' = 180^\circ$, do đó

$$\sin A = \sin (180^\circ - A') = \sin A' = \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R.$$



Hình 1.5

1.3.2. Định lý hàm số cosin

Định lý 1.6. Trong tam giác ABC có các hệ thức

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad (1.7)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B; \quad (1.8)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad (1.9)$$

Chứng minh.

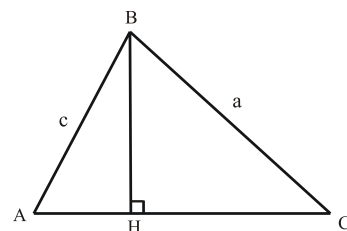
Cách 1 (Dùng công cụ vectơ). Vai trò của a, b, c như nhau, ta chỉ chứng minh công thức (1.7).

Để đơn giản ta đặt: $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \vec{a} &= \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{a}^2 = (\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{b}\vec{c} \\ &\Leftrightarrow \vec{a}^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\vec{b}, \vec{c}) \\ &\Leftrightarrow \vec{a}^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\pi - A) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.\end{aligned}$$

Cách 2 (Dùng công cụ đại số). Đây chính là ứng dụng của định lý Pythagoras.

Trường hợp cả hai góc B, C đều là góc nhọn.
Áp dụng định lý Pythagoras cho hai tam giác vuông ACH và ABH ta có $AH^2 + CH^2 = AC^2$ và $AH^2 + BH^2 = AB^2$.



Hình 1.6

Trừ tương ứng 2 vế của 2 đẳng thức trên ta được $CH^2 - BH^2 = AC^2 - AB^2$
 $\Rightarrow (BC - BH)^2 - BH^2 = AC^2 - AB^2$
 $\Rightarrow BC^2 - 2BC \cdot BH = AC^2 - AB^2$ hay $a^2 - 2a \cdot BH = b^2 - c^2$.

$$\Rightarrow BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \quad (1.10)$$

Trong tam giác vuông ABH có $\cos B = \frac{BH}{AB}$. Kết hợp với (1.10) ta suy ra: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ hay $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

Tương tự ta chứng minh được

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C; \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

1.3.3. Bài toán

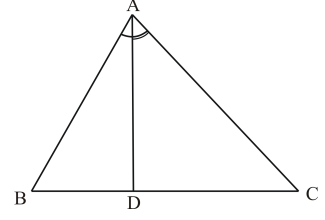
Bài toán 1.2. (F.Smarandache) Cho tam giác ABC , D là điểm tùy ý trên cạnh BC . Giả sử $BD = m, CD = n, \widehat{BAD} = \alpha, \widehat{CAD} = \beta$. Khi đó

$$\frac{m}{n} = \frac{c \cdot \sin \alpha}{b \cdot \sin \beta}. \quad (1.11)$$

Lời giải. Ta có $[BAD] = \frac{1}{2}m \cdot h_a = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \alpha$;
 $[CAD] = \frac{1}{2}n \cdot h_a = \frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin \beta$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\frac{[BAD]}{[CAD]} &= \frac{\frac{1}{2}m.h_a}{\frac{1}{2}n.h_a} = \frac{\frac{1}{2}AB.AD.\sin\alpha}{\frac{1}{2}AC.AD.\sin\beta} \\ \Leftrightarrow \frac{m}{n} &= \frac{c.\sin\alpha}{b.\sin\beta} \quad (\text{đpcm}).\end{aligned}$$



Hình 1.7

Hệ quả 1.4. Giả sử AD là phân giác của góc A . Khi đó $\alpha = \beta = \frac{A}{2}$ nên từ (1.11) ta có $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$.

Bài toán 1.3. (J. Sandor) Giả sử AD và AE là hai tia ($D, E \in BC$) tương ứng tạo với AB và AC các góc α, β . Nếu $\hat{A} \leq 90^\circ$ và $\alpha \leq \beta$ thì

$$\frac{BD.BE}{CD.CE} \leq \frac{AB^2}{AC^2}. \quad (1.12)$$

Lời giải. Thật vậy theo công thức (1.11) ta có

$$\frac{BD}{CD} = \frac{ABD}{ACD} = \frac{AB.\sin\alpha}{AC.\sin(A-\alpha)}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{BE}{CE} = \frac{AB.\sin(A-\alpha)}{AC.\sin\beta}.$$

$$\Rightarrow \frac{BD.BE}{CD.CE} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin(A-\beta)}{\sin(A-\alpha)}. \quad (1.13)$$

Vì $0 < \alpha \leq \beta < 90^\circ$ và $0 < A - \beta \leq A - \alpha < 90^\circ$, từ (1.13) $\Rightarrow$ (1.12).

Nhận xét rằng, nếu $\alpha = \beta$ thì $\frac{BD.BE}{CD.CE} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

1.4. Định lý Stewart và áp dụng

1.4.1. Định lý Stewart

Định lý 1.7. Cho $\triangle ABC$ với các độ dài $BC = a, CA = b, AB = c$. Kẻ tia Am của góc A , cắt cạnh BC tại M . Giả sử $AM = p, BM = m, MC = n$. Khi đó:

$$a(p^2 + mn) = mb^2 + nc^2. \quad (1.14)$$

Chứng minh. Áp dụng định lý hàm số cosin cho các tam giác AMB và AMC , ta có

$$c^2 = p^2 + m^2 - 2pm \cos(\widehat{AMB}); \quad b^2 = p^2 + n^2 - 2pn \cos(\widehat{AMC}).$$

Chú ý rằng $\cos(\widehat{AMB}) = \cos(\pi - \widehat{AMC}) = -\cos(\widehat{AMC})$, nên ta có

$$c^2 = p^2 + m^2 + 2pm \cos(\widehat{AMC}); \quad b^2 = p^2 + n^2 - 2pn \cos(\widehat{AMC}).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} nc^2 + mb^2 &= p^2(n+m) + mn(m+n) = (m+n)(p^2 + mn) = a(p^2 + mn). \\ \Rightarrow a(p^2 + mn) &= mb^2 + nc^2 \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

1.4.2. Định lý đường trung tuyến

Định lý 1.8. Trong một tam giác ba đường trung tuyến gặp nhau tại một điểm được gọi là trọng tâm của tam giác. Trên mỗi đường trung tuyến, khoảng cách từ trọng tâm đến đỉnh bằng hai lần khoảng cách trọng tâm đến chân đường trung tuyến.

Định lý 1.9. (Định lý Apollonius - Pappus). Trong tam giác ABC có các hệ thức sau đây về đường trung tuyến.

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}; \quad m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}; \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \quad (1.15)$$

Chứng minh.

Cách 1: Theo phần chứng minh định lý cosin trong tam giác ta có kết quả: $BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$.

Giả sử $AB < AC$ thì $BH < BM$ nên

$$HM = BM - BH = \frac{a}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{c^2 - b^2}{2a} \Rightarrow HM = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} m_a^2 &= AM^2 = AH^2 + HM^2 = AB^2 - BH^2 + HM^2 \\ &= c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c^2 - b^2}{2a} \right)^2 = c^2 - \frac{a^4 + 2a^2(c^2 - b^2)}{4a^2} \\ \Rightarrow m_a^2 &= \frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Tương tự ta có $m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$; $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

Cách 2: Trong công thức (1.14) đặt $p = m_a, m = n = \frac{a}{2}$, ta có

$$a(m_a^2 + \frac{a^2}{4}) = \frac{a}{2}(b^2 + c^2) \Rightarrow m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Các công thức còn lại được chứng minh tương tự.

Bài toán 1.4. Chứng minh rằng, nếu $m_b = m_c$, thì tam giác ABC cân tại A .

Lời giải. Theo công thức đường trung tuyến ta có

$$\begin{aligned} m_b^2 - m_c^2 = 0 &= \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} - \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{c^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(3c^2 - 3b^2) = 3(c - b)(c + b). \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $b = c$ và ta có điều phải chứng minh.

1.4.3. Định lý về đường phân giác

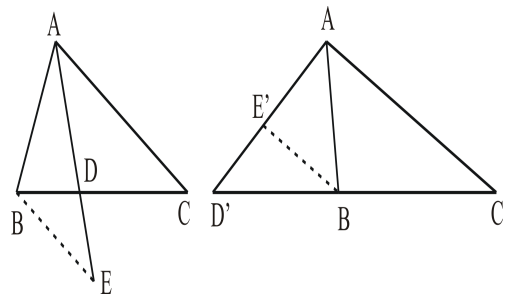
Định lý 1.10. Đường phân giác trong của góc ứng với một đỉnh của tam giác chia cạnh đối diện với đỉnh thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề.

Chứng minh. Cho tam giác ABC và AD là đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$. Ta phải chứng minh $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.

Qua điểm B vẽ đường thẳng song song với cạnh AC , cắt đường thẳng AD tại điểm E . Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}$ (giả thiết) và $\widehat{BEA} = \widehat{EAC}$ (so le trong).

Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$. Do đó tam giác BAE cân, nên $AB = BE$.

Áp dụng hệ quả của định lý Thales ta có $\frac{BE}{AC} = \frac{DB}{DC}$.



Hình 1.8

Nhưng $BE = AB$, do đó $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.

Chú ý: Định lý vẫn đúng đối với đường phân giác ngoài của tam giác $\frac{AB}{AC} = \frac{D'B}{D'C}$.

Định lý 1.11. (Công thức đường phân giác). Độ dài các phân giác l_a, l_b, l_c của góc A, B, C trong tam giác ABC tương ứng được tính theo công thức

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2}; \quad l_b = \frac{2ca}{c+a} \cdot \cos \frac{B}{2}; \quad l_c = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos \frac{C}{2}. \quad (1.16)$$

Chứng minh. Sử dụng công thức diện tích tam giác

$$\begin{aligned} [ABC] &= [ADB] + [ADC] \\ \Leftrightarrow b.c \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) &= AD.c \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) + AD.b \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 2bc \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A}{2}\right) &= AD \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right)(b+c) \\ \Rightarrow AD &= \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\left(\frac{A}{2}\right). \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta suy ra 2 công thức:

$$l_b = \frac{2ca}{c+a} \cdot \cos\left(\frac{B}{2}\right); \quad l_c = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos\left(\frac{C}{2}\right).$$

Định lý 1.12. (Định lý Steiner - Lehmus). Tam giác có hai đường phân giác bằng nhau là tam giác cân.

Chứng minh. Giả sử trong tam giác ABC có $l_b = l_c$. Ta sẽ chứng minh $b = c$. Sử dụng các công thức (1.16) và các biến đổi đại số cần thiết ta có

$$0 = l_b^2 - l_c^2 = a(a+b+c)(c-b) \frac{(a+b+c)(bc+a^2) + 2abc}{(a+b)^2(a+c)^2}. \quad (1.17)$$

Trong công thức (1.17) thừa số duy nhất có thể bằng không là $c - b$, vậy $b = c$.

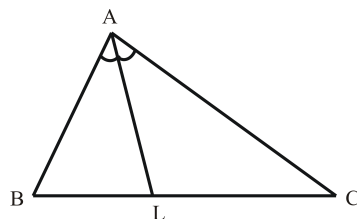
1.4.4. Công thức góc chia đôi

Định lý 1.13. Công thức góc chia đôi:

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{r}{p-a}.$$



Hình 1.9

Chứng minh. Vẽ tia phân giác AL của tam giác ABC . Ta có

$$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{BL}{BL+CL} = \frac{c}{c+b} \Leftrightarrow BL = \frac{ac}{b+c}.$$

Áp dụng định lý hàm số cosin cho $\triangle ABL$, ta có

$$\begin{aligned} AL^2 &= AB^2 + BL^2 - 2AB \cdot BL \cdot \cos B \\ &= c^2 + \frac{a^2 c^2}{(b+c)^2} - 2 \frac{ac^2}{b+c} \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{c}{(b+c)^2} (2cb^2 + bc^2 - ba^2 + b^3) \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} [(b+c)^2 - a^2] = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a). \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow AL = \frac{2}{(b+c)} \sqrt{b \cdot c \cdot p(p-a)} \quad \Leftrightarrow \quad l_a = \frac{2}{(b+c)} \sqrt{b \cdot c \cdot p(p-a)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác} \quad [ABC] &= [ABL] + [ACL] = \frac{1}{2} AB \cdot AL \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AC \cdot AL \cdot \sin \frac{A}{2} \\ &= \frac{1}{2} l_a (b+c) \sin \frac{A}{2} = \sqrt{b \cdot c \cdot p(p-a)} \sin \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó} \quad \sin \frac{A}{2} = \frac{[ABC]}{\sqrt{b \cdot c \cdot p(p-a)}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Chứng minh công thức $\cos \frac{A}{2}$.

Ta có

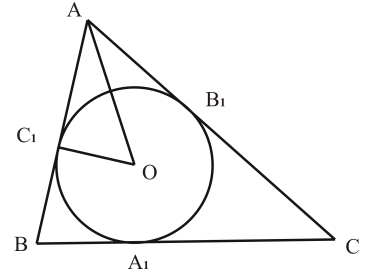
$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{A}{2} &= \frac{1 + \cos A}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = \frac{1}{4bc} [(b+c)^2 - a^2] \\ &= \frac{1}{4bc} (b+c+a)(b+c+a-2a) = \frac{p(p-a)}{bc} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Chứng minh công thức $\tan\left(\frac{A}{2}\right)$.

Gọi O là đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Giả sử (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1 .

Đặt $AB_1 = AC_1 = x, BC_1 = BA_1 = y, CA_1 = CB_1 = z$.



Hình 1.10

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2x + 2y + 2z &= (x + y) + (y + z) + (z + x) \\ &= (AC_1 + BC_1) + (BA_1 + CA_1) + (CB_1 + AB_1) \\ &= AB + BC + CA = 2p. \\ &\Leftrightarrow x + y + z = p. \end{aligned}$$

Mà $y + z = BA_1 + CA_1 = CA = a \Leftrightarrow x = p - (y + z) = p - a$.

Trong $\triangle AC_1I$ vuông tại C_1 , ta có $\tan \frac{A}{2} = \tan \widehat{IAC_1} = \frac{IC_1}{AC_1} = \frac{r}{p - a}$.

$$\text{Mà } r = \frac{[ABC]}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

$$\text{Do đó } \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Các công thức còn lại được suy ra từ công thức này bằng cách áp dụng các hệ thức cơ bản.

Bài toán 1.5. Chứng minh rằng trong $\triangle ABC$, ta có

$$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

Lời giải. Áp dụng công thức góc chia đôi, ta có

$$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \frac{p-c}{p}.$$

$$\text{Tương tự ta có } \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{p-a}{p}; \quad \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = \frac{p-b}{p}.$$

$$\text{Do đó } \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

Bài toán 1.6. Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}.$$

Lời giải. Áp dụng công thức góc chia đôi, ta được

$$\begin{aligned} & \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \\ &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} + \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-c)(p-a)}} + \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} \\ &= \sqrt{\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}} [(p-a) + (p-b) + (p-c)] \\ &= p \sqrt{\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

1.5. Công thức về diện tích của tam giác và áp dụng

1.5.1. Công thức về diện tích của tam giác

$$[ABC] = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c, \quad (1.18)$$

$$= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C, \quad (1.19)$$

$$= \frac{abc}{4R}, \quad (1.20)$$

$$= 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C, \quad (1.21)$$

$$= pr, \quad (1.22)$$

$$= (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c, \quad (1.23)$$

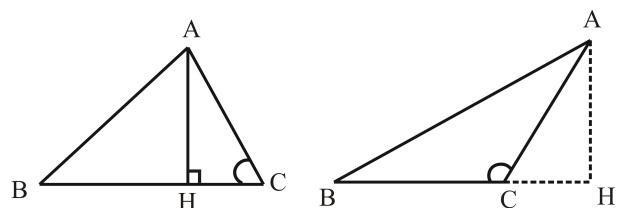
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1.24)$$

Ta đi chứng minh một số công thức diện tích tam giác.

Chứng minh công thức (1.19).

Ta đã biết $[ABC] = \frac{1}{2}ah_a$.

Nhưng $h_a = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = b \cdot \sin \widehat{ACH}$. Nếu góc C của tam



Hình 1.11

giác ABC nhọn thì $\widehat{ACH} = \widehat{C}$ và nếu góc C tù thì $\widehat{ACH} = 180^\circ - \widehat{C}$, trong cả hai trường hợp ta đều có $\sin \widehat{ACH} = \sin \widehat{C}$.

Bởi vậy ta có $[ABC] = \frac{1}{2}ab \sin C$. Trường hợp đặc biệt nếu $C = 90^\circ$ thì $h_a = b$ và $\sin C = 1$ nên ta vẫn có công thức đó.

Chứng minh tương tự ta có $[ABC] = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$.

Từ công thức (1.19) thay $\sin C = \frac{c}{2R}$ ta có ngay công thức (1.20).

Chứng minh công thức (1.22).

Giả sử đường tròn nội tiếp có tâm I và tiếp xúc ba cạnh của tam giác tại A', B', C' như hình vẽ trên. Diện tích tam giác ABC bằng tổng diện tích ba tam giác OBC, OCA, OAB , các tam giác đó có các đường cao là $OA' = OB' = OC' = r$.

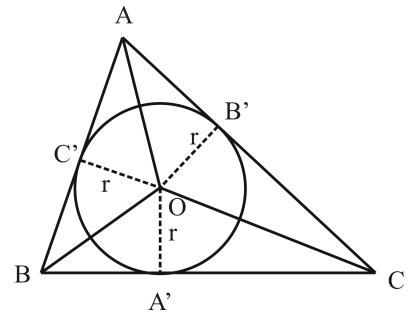
Bởi vậy $[ABC] = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr$.

Chứng minh công thức (1.24). Từ hệ thức đã biết

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \quad (1.25)$$

Sử dụng định lý hàm số sin và hàm số cosin, trong (1.25) thay $\sin A = \frac{4S}{2bc}$ và $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ta có

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2] \\ &= (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c) \\ &= \frac{(b + c + a)}{4} \cdot \frac{(b + c - a)}{4} \cdot \frac{(a + b - c)}{4} \cdot \frac{(a - b + c)}{4} \\ &= p(p - a)(p - b)(p - c). \\ \Rightarrow S &= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \end{aligned}$$



Hình 1.12

1.5.2. Tỉ số diện tích hai tam giác

Bổ đề 1.2. (Bổ đề về tỉ số diện tích hai tam giác). Giả sử B' và C' tương ứng là các điểm tùy ý trên cạnh AB và AC của tam giác ABC . Ký hiệu $S = [ABC]$, $S' = [A'B'C']$. Khi đó $\frac{S'}{S} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC}$.

Chứng minh. Ta có

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB' \cdot AC' \cdot \sin A}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC}. \quad (1.26)$$

Định lý 1.14. Nếu hai đoạn thẳng $AB \cap PQ \equiv M$, thì ta có

$$\frac{[ABP]}{[ABQ]} = \frac{PM}{QM}. \quad (1.27)$$

1.5.3. Bài toán

Bài toán 1.7. Chứng minh rằng trong tam giác ABC có các hệ thức

$$(a). \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}, \quad (1.28)$$

$$(b). \quad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}. \quad (1.29)$$

Lời giải.

$$(a). \text{ Ta có } S = p \cdot r = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2p \cdot r}.$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2p \cdot r}; \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2p \cdot r}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2p \cdot r} = \frac{1}{r}.$$

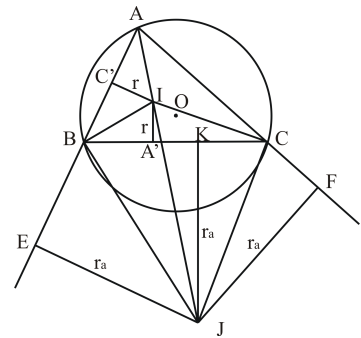
(b). Ta chứng minh

$$S = (p - a) \cdot r_a = (p - b) \cdot r_b = (p - c) \cdot r_c,$$

với r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C . Ta có $\frac{IC'}{JE} = \frac{AC'}{AE}$ với

$$C'I = r; JE = r_a; AC' = p - a; AE = p$$

$$\Rightarrow \frac{r}{r_a} = \frac{p - a}{p} \Rightarrow (p - a)r_a = S = pr \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p - a}{pr}.$$



Hình 1.13

Tương tự ta có $\frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{pr}$; $\frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{pr}$.

Vậy $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{pr} + \frac{p-b}{pr} + \frac{p-c}{pr} = \frac{3p - (a+b+c)}{pr} = \frac{p}{pr} = \frac{1}{r}$.

Bài toán 1.8. Cho tam giác ABC có diện tích S . Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho

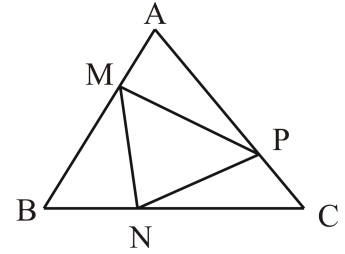
$$\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PA} = k. \quad (1.30)$$

(a) Tính diện tích của tam giác MNP theo S và k .

(b) Với giá trị nào của k diện tích của tam giác MNP là nhỏ nhất?

Lời giải. (a). Đặt $AB = c, BC = a, CA = b$.

Theo (1.30) ta có



Hình 1.14

$$\begin{aligned} \frac{MA}{MA+MB} &= \frac{NB}{NB+NC} = \frac{PC}{PA+PC} = \frac{k}{k+1} \\ \Rightarrow \frac{MA}{c} &= \frac{NB}{a} = \frac{PC}{b} = \frac{k}{k+1} \\ \Rightarrow MA &= \frac{kc}{k+1}; \quad NB = \frac{ka}{k+1}; \quad PC = \frac{kb}{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S} &= \frac{AM \cdot AP}{AB \cdot AC} = \frac{\frac{kc}{k+1} \cdot (b - \frac{kb}{k+1})}{bc} = \frac{k}{(k+1)^2} \\ \Rightarrow \frac{S_1}{S} &= \frac{k}{(k+1)^2}; \quad \frac{S_2}{S} = \frac{k}{(k+1)^2}; \quad \frac{S_3}{S} = \frac{k}{(k+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{MPN} = S - \frac{3kS}{(k+1)^2} = S \left[\frac{k^2 + 2k + 1 - 3k}{(k+1)^2} \right] = \frac{S(k^2 - k + 1)}{(k+1)^2}.$$

(b). Đặt $y = \frac{k^2 - k + 1}{k^2 + 2k + 1}$; $k > 0$. Khi đó

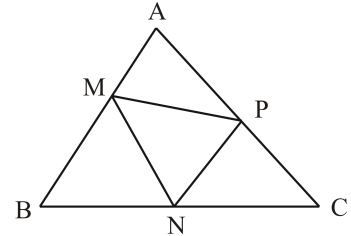
$$\begin{aligned} k^2y + 2ky + y &= k^2 - k + 1 \\ \Leftrightarrow k^2(y - 1) + k(2y + 1) + (y - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow y - 1 = 0 &\Rightarrow y = 1 \Leftrightarrow 3k = 0 \Rightarrow k = 0 \quad (\text{vô lí}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(y-1) \left[k^2 + \frac{k(2y+1)}{y-1} + 1 \right] &= 0 \\
k^2 + 2k \cdot \frac{2y+1}{2(y-1)} + \frac{(2y+1)^2}{4(y-1)^2} - \frac{(2y+1)^2}{4(y-1)^2} + \frac{4(y-1)^2}{4(y-1)^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow \left(k + \frac{2y+1}{2(y-1)} \right)^2 &= \frac{(2y-1)^2 - 4(y-1)^2}{4(y-1)} \geq 0 \\
\Rightarrow (2y+1)^2 - 4(y+1)^2 &\geq 0 \\
\Rightarrow (2y+1-2y-2)(2y+1+2y-2) &\geq 0 \\
\Rightarrow 4y-1 \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \min y = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow k = 1.
\end{aligned}$$

Bài toán 1.9. Cho tam giác ABC có diện tích S . Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P tùy ý. Kí hiệu S_1, S_2, S_3 tương ứng là diện tích của các tam giác APM, BMN, CNP . Chứng minh rằng $S_1 S_2 S_3 \leq \frac{S^3}{64}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\text{Đặt } \frac{MA}{AB} &= m (0 < m < 1); \\
\frac{NB}{BC} &= n (0 < n < 1); \quad \frac{PC}{CA} = k (0 < k < 1). \\
\frac{S_1}{S} &= \frac{MA}{AB} \cdot \frac{PA}{AC} = m(1-k); \\
\frac{S_2}{S} &= n(1-m); \quad \frac{S_3}{S} = k(1-n).
\end{aligned}$$



Hình 1.15

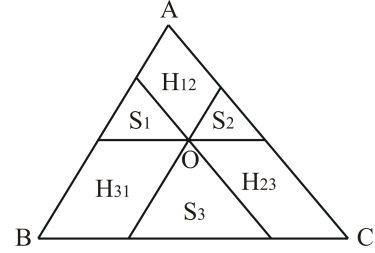
$$\begin{aligned}
\frac{S_1 S_2 S_3}{S^3} &= m(1-m) \cdot n(1-n) \cdot k(1-k) \\
&= (m-m^2)(n-n^2)(k-k^2) \\
&= -(m^2 - 2m \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) \cdot (n^2 - 2n \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) \cdot (k^2 - 2k \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) \\
&= - \left[\left(m - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \cdot \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \cdot \left[\left(k - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \\
&= - \left[\left(-m + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \cdot \left[\left(-n + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \cdot \left[\left(-k + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\
\Rightarrow \frac{S_1 S_2 S_3}{S^3} &\leq \frac{1}{64} \Rightarrow S_1 S_2 S_3 \leq \frac{S^3}{64}.
\end{aligned}$$

Bài toán 1.10. Qua điểm O bên trong tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Giả sử S_1, S_2, S_3 là diện tích của ba tam giác mới được tạo thành, còn S là diện tích của tam giác ABC . Chứng minh rằng $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Lời giải.

Ta có $\triangle MBC \sim \triangle OPC$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{S_1 + S_2 + H_{12}}{S_2} &= \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right)^2 = \left(1 + \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \right)^2 \\ &= \frac{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}{\sqrt{S_2}^2} = \frac{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}{S_2} \end{aligned}$$



Hình 1.16

$$\Rightarrow S_1 + S_2 + H_{12} = S_1 + 2\sqrt{S_1 S_2} + S_2 \Rightarrow H_{12} = 2\sqrt{S_1 S_2}.$$

Tương tự $H_{23} = 2\sqrt{S_2 S_3}$; $H_{31} = 2\sqrt{S_3 S_1}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{ABC} &= 2\sqrt{S_1 S_2} + 2\sqrt{S_2 S_3} + 2\sqrt{S_3 S_1} + S_1 + S_2 + S_3 \\ &= (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2 \\ \Rightarrow S_{ABC} &= (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2 (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Bài toán 1.11. Kí hiệu m_a, m_b, m_c tương ứng là các đường trung tuyến với các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng diện tích S của tam giác ABC có thể được tính theo công thức

$$S = \frac{4}{3} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}, \quad m = \frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c).$$

Lời giải. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A dựng hình bình hành $BGCF$. Kí hiệu S là diện tích tam giác ABC .

Đặt $m_a = 3x, m_b = 3y, m_c = 3z$. Ta có $S = 3[BGC] = 3[GFC]$.

Áp dụng công thức Heron cho tam giác GFC ta có

$$\text{Ta có } S = 3[GFC] = 3\sqrt{(x + y + z)(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)}.$$

$$\text{Đặt } m = \frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c) = \frac{3}{2}(x + y + z) \Rightarrow x + y + z = \frac{2}{3}m.$$

$$\text{Thay vào công thức trên ta có } S = \frac{4}{3} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}.$$

Bài toán 1.12. Cho P là điểm nằm trong tam giác ABC . Tia AP , BP , CP lần lượt cắt các cạnh BC , CA , AB tương ứng tại D , E , F . Chứng minh rằng $\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1$.

Lời giải.

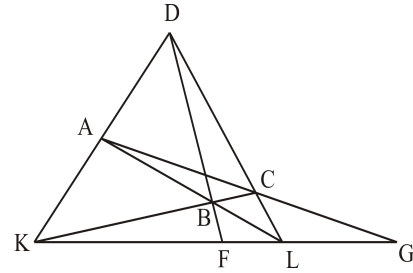
$$\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = \frac{[PBC]}{[ABC]} + \frac{[APC]}{[ABC]} + \frac{[ABP]}{[ABC]} = \frac{[ABC]}{[ABC]} = 1.$$

Bài toán 1.13. Cho tứ giác lồi $ABCD$. DA cắt CB tại K , AB cắt DC tại L , AC cắt KL tại G , DB cắt KL tại F . Chứng minh rằng $\frac{KF}{FL} = \frac{KG}{GL}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức (1.27) nhiều lần ta được

$$\begin{aligned} \frac{KF}{FL} &= \frac{[KBD]}{[LBD]} = \frac{[KBD]}{[KBL]} \cdot \frac{[KBL]}{[LBD]} \\ &= \frac{CD}{CL} \cdot \frac{AK}{AD} = \frac{[ACD]}{[ACL]} \cdot \frac{[ACK]}{[ACD]} \\ &= \frac{[ACK]}{[ACL]} = \frac{KG}{LG} \end{aligned}$$



Hình 1.17

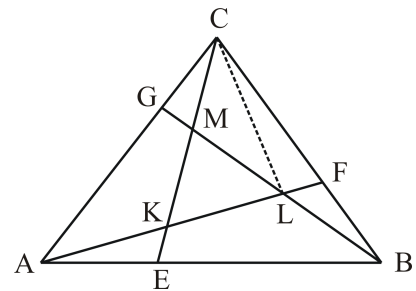
Bài toán 1.14. (IMO 1998 Hong Kong Preliminary Selection Contest)

Trong tam giác ABC gọi E , F , G lần lượt là các điểm trên các cạnh AB , BC , CA sao cho $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CG}{GA} = \frac{1}{3}$. Gọi K , M , L lần lượt là giao điểm của các cặp AF và CE , BG và AF , CE và BG . Biết diện tích tam giác ABC bằng 1. Tính diện tích tam giác KLM .

Lời giải.

Đặt $[ABL] = S$. Theo công thức (1.27) ta có $[CAL] = 3S$ và $[BCL] = \frac{S}{3}$.

Lưu ý rằng $[ABL] + [BCL] + [CAL] = [ABC] = 1$. Vì vậy ta có $S + \frac{S}{3} + 3S = 1$ và do đó $S = \frac{3}{13}$. Vậy ta đã chứng minh được



Hình 1.18

$[ABL] = \frac{3}{13}$. Tương tự như trên ta cũng có $[BCM] = [CAK] = \frac{3}{13}$.

Do đó

$$[KLM] = [ABC] - [ABL] - [BCM] - [CAK] = 1 - \frac{3}{13} - \frac{3}{13} - \frac{3}{13} = \frac{4}{13}.$$

1.6. Tam giác Pedal

1.6.1. Pedal bất kỳ

Định nghĩa 1.3. Từ điểm P tùy ý bên trong tam giác ABC hạ các đường vuông góc với các cạnh BC, CA và AB với các chân đường vuông góc tương ứng là A_1, B_1, C_1 . Tam giác $A_1B_1C_1$ được gọi là tam giác Pedal (hoặc tam giác bàn đạp) của điểm P đối với tam giác ABC .

Định lý 1.15. (Định lý Euler) Diện tích tam giác Pedal của điểm P đối với tam giác ABC được tính theo công thức

$$[A_1B_1C_1] = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} [ABC].$$

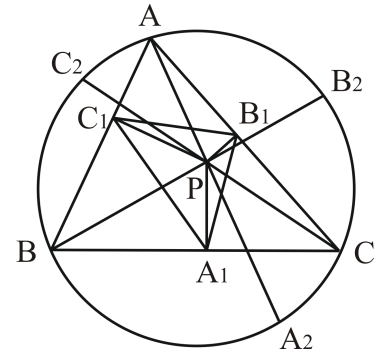
trong đó O và R tương ứng là tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Chứng minh. Kéo dài AP, BP, CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại các điểm A_2, B_2, C_2 tương ứng.

Ta có $\widehat{C_1A_1P} = \widehat{C_1BP}$ (tứ giác C_1BA_1P nội tiếp). $\widehat{PBC_1} = \widehat{ABB_2}$ (do B, C_1, A thẳng hàng và B, P, B_2 thẳng hàng). $\widehat{ABB_2} = \widehat{AA_2B_2}$ (cùng chắn cung AB_2). Từ đó suy ra $\widehat{C_1A_1P} = \widehat{AA_2B_2}$. Tương tự $\widehat{B_1A_1P} = \widehat{AA_2C_2}$.

Từ đó suy ra $\widehat{C_1A_1B_1} = \widehat{C_2A_2B_2}$. Ta sẽ ký hiệu tương ứng hai góc này là A_1 và A_2 . Ta có:

$$\begin{aligned} [A_1B_1C_1] &= \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin A_1 \\ &= \frac{1}{2} PC \cdot \sin C \cdot PB \cdot \sin B \cdot \sin A_1 \quad (\text{Định lý hàm số sin}) \end{aligned}$$



Hình 1.19

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} PB \cdot PB_2 \cdot \frac{PC}{PB_2} \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \sin A_1 \\
&= \frac{1}{2} |PO^2 - R^2| \cdot \frac{BC}{C_2B_2} \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \sin A_1 \quad (\text{phương tích } PBC \sim PC_2B_2) \\
&= \frac{1}{2} |PO^2 - R^2| \cdot BC \cdot \sin C \cdot \sin B \cdot \frac{\sin A_2}{B_2C_2} \\
&= \frac{1}{8} \left| 1 - \frac{PO^2}{R^2} \right| \cdot AC \cdot BC \cdot \sin C \quad \left(\text{do } \sin B = \frac{AC}{2R}; \frac{\sin A_2}{B_2C_2} = \frac{1}{2}R \right) \\
&= \frac{1}{4} [ABC] \cdot \left| 1 - \frac{PO^2}{R^2} \right| \\
&= \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} [ABC].
\end{aligned}$$

Định lý Euler là một kết quả thú vị và sâu sắc trong tam giác.

Từ kết quả của định lý Euler, ta thấy nếu P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , tức là nếu $OP = R$ thì diện tích tam giác Pedal bằng 0. Điều đó có nghĩa là tam giác $A_1B_1C_1$ suy biến thành đường thẳng. Đường thẳng đó chính là đường thẳng Simson chúng ta sẽ đề cập đến trong chương 5.

Hệ quả 1.5. Khi P trùng với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác thì $A_1B_1C_1$ là tam giác nội tiếp trong đường tròn tâm I bán kính r , có các góc A_1, B_1, C_1 tương ứng bằng $90^\circ - \frac{A}{2}, 90^\circ - \frac{B}{2}, 90^\circ - \frac{C}{2}$ nên ta có

$$\begin{aligned}
[A_1B_1C_1] &= 2r^2 \sin A_1 \cdot \sin B_1 \cdot \sin C_1 = \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \\
&[ABC] \cdot \frac{r}{2R}.
\end{aligned}$$

Từ đó, thay vào định lý Euler, ta được

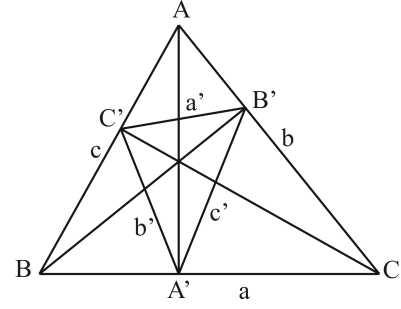
$$\begin{aligned}
[ABC] \cdot \frac{r}{2R} &= \frac{1}{4} [ABC] \cdot \left(1 - \frac{IO^2}{R^2} \right) \\
\Rightarrow 2Rr &= R^2 - IO^2 \Rightarrow IO^2 = R^2 - 2Rr.
\end{aligned}$$

1.6.2. Pedal trực tâm

Định nghĩa 1.4. Pedal trực tâm là tam giác Pedal của trực tâm đối với tam giác ABC .

Các tính chất của Pedal trực tâm được cho bởi định lý sau đây.

Định lý 1.16. Cho ABC là tam giác nhọn với chiều dài các cạnh là a, b, c . Các đường cao AA', BB', CC' , diện tích S . Bán kính đường tròn ngoại tiếp là R , bán kính đường tròn nội tiếp là r . Xét tam giác $A'B'C'$ với các đại lượng tương ứng nêu trên như đối với tam giác ABC . Khi đó:



Hình 1.20

$$(1). \quad a' = a \cos A, \quad b' = b \cos B, \quad c' = c \cos C, \quad (1.31)$$

$$(2). \quad S' = 2S \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C, \quad (1.32)$$

$$(3). \quad R' = \frac{R}{2}, \quad (1.33)$$

$$(4). \quad r' = \frac{r \cdot \cos A \cos B \cos C}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}, \quad (1.34)$$

$$(5). \quad p' = 4p \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \quad (1.35)$$

Chứng minh.

(1). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , ta có

$$\frac{a'}{a} = \frac{HB'}{HC} = \sin C_1 = \cos A; \quad \frac{b'}{a} = \frac{HA'}{HC} = \sin C_2 = \cos B.$$

Tương tự ta lại có $\frac{c'}{c} = \cos C$.

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = \cos A + \cos B + \cos C$.

(2). Theo hình vẽ ta có

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} a' b' \sin \widehat{A'B'C'} = \frac{1}{2} a' b' \sin 2\widehat{HC'A'} \\ &= \frac{1}{2} a' b' \sin 2(90^\circ - \widehat{C}) = \frac{1}{2} a' b' \sin (180^\circ - \widehat{C}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(a \cos A)(b \cos B) \sin (2\widehat{C}) \\
&= \left(\frac{1}{2}ab \sin C \right) (2 \cos A \cos B \cos C) = 2S. \cos A \cos B \cos C.
\end{aligned}$$

(3). Sử dụng các công thức $S' = \frac{a'b'c'}{4R'}$, $S = \frac{abc}{4R}$, ta có

$$\frac{S'}{S} = \frac{a'b'c'}{abc} \cdot \frac{R}{R'} = \cos A \cos B \cos C \cdot \frac{R}{R'}. \quad (1.36)$$

Theo chứng minh trên ta lại có

$$\frac{S'}{S} = 2 \cos A \cos B \cos C. \quad (1.37)$$

Từ (1.36) và (1.37) suy ra

$$\cos A \cos B \cos C \cdot \frac{R}{R'} = 2 \cos A \cos B \cos C \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{1}{2}.$$

$$(4). \text{ Ta có } r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned}
r' &= 4R' \sin \frac{A'}{2} \sin \frac{B'}{2} \sin \frac{C'}{2} \\
&= 4R' \sin \left(90^\circ - \frac{B' + C'}{2} \right) \cdot \sin \left(90^\circ - \frac{A' + C'}{2} \right) \cdot \sin \left(90^\circ - \frac{A' + B'}{2} \right) \\
&= 4R' \sin (90^\circ - A) \sin (90^\circ - B) \sin (90^\circ - C). \\
&= 4R' \cos A \cos B \cos C.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh

(5). Gọi O là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Để chứng minh rằng OA vuông góc với $B'C'$, OB vuông góc với $A'C'$, OC vuông góc với $A'B'$. Do đó

$$\begin{aligned}
[ABC] &= [OB'AC'] + [OC'BA'] + [OA'CB'] \\
&= \frac{1}{2}OA \cdot B'C' + \frac{1}{2}OB \cdot A'C' + \frac{1}{2}OC \cdot A'B' = \frac{1}{2}R \cdot (2p') = Rp'.
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta có công thức } p' = \frac{S}{R} = \frac{pr}{R} = p \cdot \frac{r}{R} = 4p \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

1.6.3. Pedal tâm nội tiếp

Định nghĩa 1.5. Pedal tâm nội tiếp là tam giác Pedal của tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC .

Bài toán 1.15. Tam giác ABC với độ dài các cạnh là a, b, c và diện tích S , đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh ở A', B', C' (đối diện với các đỉnh A, B, C). Tam giác $A'B'C'$ có độ dài các cạnh là a', b', c' và diện tích S' . Chứng minh các đẳng thức sau.

$$(1). \quad \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right)$$

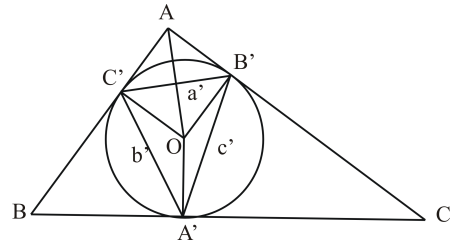
$$(2). \quad S' = 2S \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

Lời giải.

(1). Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp

$\triangle ABC$ ta suy ra $\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} = \frac{\alpha}{2} = A'$

$$\Rightarrow \sin \frac{B+C}{2} = \sin \left(\pi - \frac{A}{2} \right) = \sin A'.$$



Hình 1.21

Hệ thức lượng trong $\triangle A'B'C'$ cho

$$\begin{aligned} a' &= 2r \sin A' = 2(p-a) \tan \frac{A}{2} \sin A' \\ &= (b+c-a) \cdot \tan \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B+C}{2} = (b+c-a) \sin \frac{A}{2} \\ \Rightarrow \frac{a'}{a} &= \frac{b+c-a}{a} \cdot \sin \frac{A}{2} = \left(\frac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin A} \right) \cdot \sin \frac{A}{2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{A}{2}} \\ &= \frac{2 \cos \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right)}{2 \cos \frac{A}{2}} = 2 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b'}{b} = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right).$$

(2). Ta có

$$\begin{aligned}\frac{S'}{S} &= \frac{\frac{1}{2}a'b' \cdot \sin C'}{\frac{1}{2}ab \cdot \sin C} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{b'}{b} \cdot \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin C} \\ &= \left(2 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}\right) \cdot \left(2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}\right) \cdot \frac{\cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} \\ &= 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.\end{aligned}$$

Bài toán 1.16. Cho đường tròn tâm $(O; R)$ và điểm M cố định. Trên (O) lấy các điểm A, B, C sao cho tam giác ABC đều và đặt $AM = x, BM = y, CM = z$. Chứng minh rằng tam giác mà độ dài các cạnh là a, b, c có diện tích không đổi khi A, B, C thay đổi.

Lời giải.

Gọi (T) là tam giác có độ dài các cạnh là a, b, c . Dựng D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC .

Theo định lý sin ta dễ dàng có được:

$$\begin{aligned}\frac{DE}{MB} &= \frac{DF}{MA} = \frac{EF}{MC} = \sin 60^\circ \\ \Rightarrow \frac{DE}{b} &= \frac{DF}{a} = \frac{EF}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

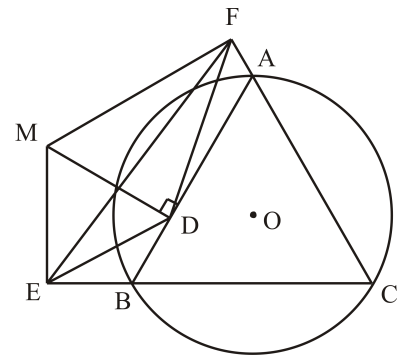
Suy ra: $\triangle DEF$ đồng dạng với (T)

theo tỉ số đồng dạng là $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{[DEF]}{[T]} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow [T] = \frac{4}{3}[DEF].$$

Do DEF là tam giác Pedal dựng từ điểm M của tam giác ABC nên theo định lý Euler, ta có được: $[DEF] = \frac{|R^2 - OM^2|}{4R^2} \cdot [ABC]$.

Mà đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định, $\triangle ABC$ đều nên $[ABC]$ cố định $\Rightarrow [DEF] = \text{const.}$



Hình 1.22

Bài toán 1.17. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O với O nằm bên trong tứ giác. Gọi $MNPQ$ là tứ giác mà các đỉnh lần lượt là hình chiếu của giao điểm 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ đến các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng:

$$[MNPQ] \leq \frac{[ABCD]}{2}.$$

Lời giải.

Gọi K là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác $ABCD$.

Dễ thấy KMN là tam giác Pedal dựng từ điểm K của tam giác ABC , do đó áp dụng định lý Euler ta được:

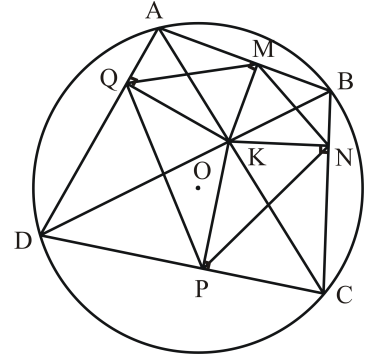
$$\frac{[KMN]}{[ABC]} = \frac{|R^2 - OK^2|}{4R^2} = \frac{R^2 - OK^2}{4R^2} \quad (\text{vì } K \text{ ở trong tứ giác}).$$

$$\Rightarrow [KMN] = \frac{(R^2 - OK^2)}{4R^2} \cdot [ABC].$$

Làm tương tự cho các tam giác $KNP, K PQ, KQM$ và cộng các kết quả lại:

$$\begin{aligned} & [KMN] + [KNP] + [K PQ] + [KQM] \\ &= \frac{R^2 - OK^2}{4R^2} \cdot ([ABC] + [BCD] + [DCA] + [DAB]) \\ \Rightarrow [MNPQ] &= \frac{R^2 - OK^2}{2R^2} [ABCD] \leq \frac{R^2 - 0}{2R^2} [ABCD] = \frac{1}{2} [ABCD]. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow OK^2 = 0 \Leftrightarrow OK = 0 \Leftrightarrow K \equiv O$.



Hình 1.23

Chương 2

Tứ giác

Trong tài liệu này chỉ xét các tứ giác lồi, tức là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của tứ giác đó.

2.1. Ký hiệu và hệ thức cơ bản

Ta ký hiệu $ABCD$ là tứ giác lồi với các đỉnh là A, B, C, D được vẽ theo một chiều nhất định nào đó (cùng chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ). Để đơn giản, độ lớn của góc tương ứng với các đỉnh A, B, C, D cũng được kí hiệu tương ứng là A, B, C, D .

Độ dài các cạnh của tứ giác: $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$.

Nửa chu vi của tứ giác: $p = \frac{a + b + c + d}{2}$.

Độ dài các đường chéo $AC = m, BD = n$.

Diện tích của tứ giác: $S = S_{ABCD} = [ABCD]$.

Hệ thức về góc: $A + B + C + D = 360^\circ (2\pi)$.

Hệ thức về cạnh:

$$a < b + c + d, \quad b < c + d + a, \quad c < d + a + b, \quad d < a + b + c.$$

Hệ thức giữa các cạnh và đường chéo: Trong một tứ giác, tổng các độ dài hai cạnh đối diện nhỏ hơn tổng hai đường chéo.

$$a + c < m + n, \quad b + d < m + n.$$

Định nghĩa 2.1. Tứ giác có hai cạnh song song được gọi là hình thang. Hai cạnh song song được gọi là hai cạnh đáy, hai cạnh còn lại được gọi là hai cạnh bên. Đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh bên được gọi là đường trung bình của hình thang. Hình thang được gọi là hình thang cân, nếu các góc kề cạnh đáy bằng nhau.

Mệnh đề 2.1. Độ dài đường trung bình của hình thang bằng một nửa tổng độ dài hai cạnh đáy $MN = \frac{AB + DC}{2}$.

Định nghĩa 2.2. Tứ giác có các cạnh đối song song được gọi là hình bình hành.

Mệnh đề 2.2. Đối với tứ giác lồi $ABCD$ các phát biểu sau đây là tương đương.

- (a) $ABCD$ là hình bình hành.
- (b) $AB = DC$ và $AD = BC$.
- (c) $AB \parallel DC$ và $AB = DC$.
- (d) $\widehat{A} = \widehat{C}$ và $\widehat{B} = \widehat{D}$.
- (e) Các đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Định nghĩa 2.3. Tứ giác có bốn góc vuông là hình chữ nhật, có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi, có bốn cạnh bằng nhau và có bốn góc vuông là hình vuông.

Mệnh đề 2.3. Đối với hình bình hành $ABCD$, các phát biểu sau đây là tương đương.

- (a) $ABCD$ là hình chữ nhật.
- (b) $\widehat{A} = 90^\circ$.
- (c) $AC = BD$.

Mệnh đề 2.4. Đối với hình bình hành $ABCD$, các phát biểu sau đây là tương đương.

- (a) $ABCD$ là hình thoi.
- (b) $AB = BC$.
- (c) $AC \perp BD$.
- (d) AC là phân giác của $\widehat{A}$.

Định nghĩa 2.4. Tứ giác lồi được gọi là nội tiếp, nếu bốn đỉnh của nó ở trên cùng một đường tròn, được gọi là ngoại tiếp, nếu bốn cạnh của nó cùng tiếp xúc với một đường tròn.

Mệnh đề 2.5. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Các phát biểu sau đây là tương đương.

- (a) $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.
- (b) $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.
- (c) $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Chứng minh.

(a) $\Rightarrow$ (b). Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ cùng chắn cung BC .

(b) $\Rightarrow$ (c). Ta có $\triangle APB \sim \triangle DPC$ (góc đối đỉnh P và $\widehat{PAB} = \widehat{PDC}$).

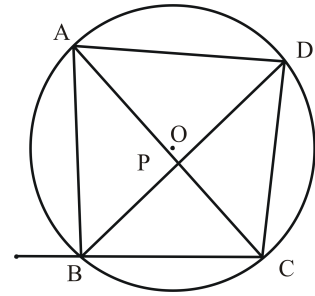
Tương tự ta có $\triangle APD \sim \triangle BPC$ (góc đối đỉnh P và $\widehat{PAD} = \widehat{PBC}$).

Vậy $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$, $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ và $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

Mặt khác:

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{ACB} + \widehat{ACD} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}) = 180^\circ.$$

(c) $\Rightarrow$ (a). Hiển nhiên.



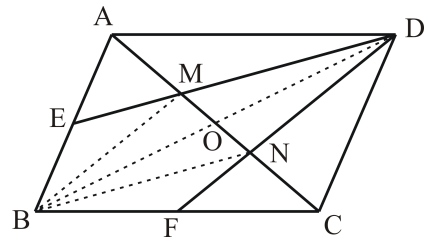
Hình 2.1

Bài toán 2.1. Trong hình vẽ, E và F tương ứng là trung điểm của AB và BC . Giả sử DE và DF cắt AC tại M và N tương ứng, sao cho $AM = MN = NC$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Nối BM, BN . Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , giả thiết cho $AE = EB, AM = MN$ vậy ta có EM song song BN . Tương tự BM song song FN . Do đó, $BMDN$ là hình bình hành, từ đó suy ra $OB = OD$ và $OM = ON$.

Mặt khác từ $AM = NC$ nên ta có $OA = OC$. Vậy tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường suy ra nó là hình bình hành.



Hình 2.2

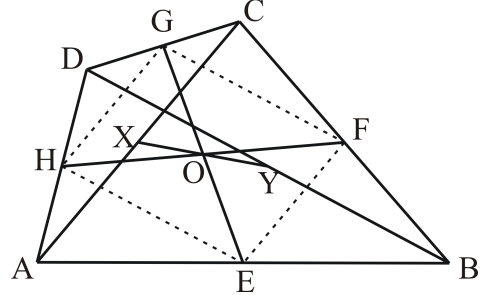
Bài toán 2.2. Chứng minh rằng trong một tứ giác lồi các đoạn thẳng sau đây cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường: Hai đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh đối diện, đoạn thẳng nối trung điểm của các đường chéo.

Lời giải. Xét tứ giác $ABCD$. Vì E, F, G, H lần lượt là trung điểm các

cạnh của tứ giác nên suy ra tứ giác $EFGH$ là hình bình hành vì thế EG và FH cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Mặt khác ta lại có $XG//YE$ (cùng song song với AD), $EX//GY$ (cùng song song với BC) nên tứ giác $EXGY$ là hình bình hành. Vậy EX, GY cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Kết luận. EG, FH, XY cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



Hình 2.3

2.2. Định lý Ptolemy và các mở rộng

2.2.1. Định lý Ptolemy

Ptolemy là một trong những định lý đẹp của hình học sơ cấp, có rất nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học.

Định lý 2.1. *Tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp một đường tròn khi và chỉ khi tổng của tích các cặp cạnh đối diện bằng tích hai đường chéo, nghĩa là*

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD. \quad (2.1)$$

Chứng minh.

Lấy M thuộc đường chéo AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$. Khi đó xét $\triangle ABD$ và $\triangle MBC$ có $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$, $\widehat{ADB} = \widehat{MCB}$. Nên $\triangle ABD \sim \triangle MBC$ (g.g).

Do đó ta có

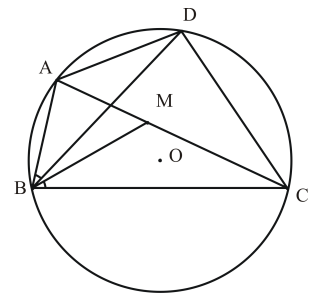
$$\frac{AD}{BD} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow AD.BC = BD.MC. \quad (2.2)$$

Lại có $\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC}$ và $\widehat{ABM} = \widehat{DBC}$ nên

$$\triangle ABM \sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow AB.CD = AM.BD. \quad (2.3)$$

Từ (2.2) và (2.3) suy ra:

$$AD.BC + AB.CD = BD.MC + AM.BD = AC.BD.$$



Hình 2.4

$$\Rightarrow AD.BC + AB.CD = AC.BD \quad (\text{đpcm}).$$

Công thức tính $\sin(\alpha + \beta)$.

Với α, β là các góc nhọn, dựng đường tròn đường kính AC và chọn các điểm B và D nằm trên hai nửa đường tròn, sao cho $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{DAC} = \beta$. Áp dụng định lý Ptolemy ta có $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Mặt khác, áp dụng định nghĩa của hàm số lượng giác, ta có $AB = AC.\cos\alpha; BC = AC.\sin\alpha; CD = AC.\sin\beta; DA = AC.\cos\beta$.

Cuối cùng áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác ABD , ta được $BD = AC.\sin(\alpha + \beta)$.

Thay vào (2.1), ta được $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha$.

Trường hợp đặc biệt - Định lý Pythagoras.

Xét hình chữ nhật $ABCD$, rõ ràng đây là một tứ giác nội tiếp. Vì thế ta có $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Do $AB = CD, AD = BC, AC = BD$ nên từ đây ta suy ra

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

2.2.2. Bất đẳng thức Ptolemy

Định lý 2.2. Với 4 điểm A, B, C, D bất kỳ trên mặt phẳng, ta có

$$AB.CD + AD.BC \geq AC.BD. \quad (2.4)$$

Chứng minh.

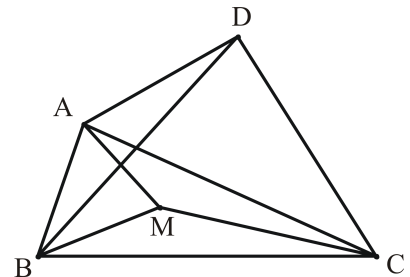
Dựng điểm E sao cho tam giác BCD đồng dạng với tam giác BEA .

Khi đó theo tính chất của tam giác đồng dạng, ta có $\frac{BA}{MA} = \frac{BD}{CD}$.

$$\Rightarrow BA.CD = MA.BD. \quad (2.5)$$

Mặt khác, do $\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC}$ và $\widehat{MBC} = \widehat{ABD}$.

$$\Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{EC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Leftrightarrow AD.BC = EC.BD. \quad (2.6)$$



Hình 2.5

Cộng theo vế (2.5) và (2.6) ta suy ra

$$AD.CD + AD.BC = BD.(EA + EC).$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta suy ra

$$AD.CD + AD.BC \geq AC.BD.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, E, C thẳng hàng, tức là khi A và D cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau, và khi đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

2.2.3. Định lý Bretschneider

Định lý 2.3. Cho tứ giác $ABCD$ có độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác lần lượt là a, b, c, d và độ dài các đường chéo AC, BD là m, n . Khi đó ta có

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cdot \cos(A + C). \quad (2.7)$$

Chứng minh.

Trên cạnh AB ra phía ngoài dựng tam giác ABN đồng dạng với tam giác CAD , và dựng ra phía ngoài cạnh AD tam giác ADM đồng dạng với tam giác CAB .

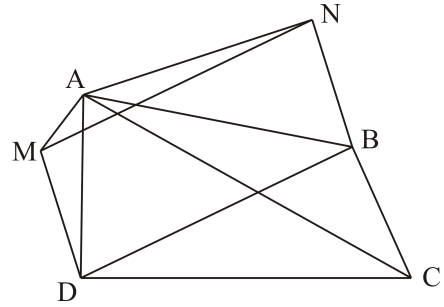
Khi đó dễ thấy $AN = \frac{ac}{m}$;

$AM = \frac{bd}{m}; NB = DM = \frac{ad}{m}$ và

$BDMN$ là hình bình hành.

Đồng thời ta có $\widehat{NAM} = \widehat{A} + \widehat{C}$. Áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác NAM ta có

$$\begin{aligned} n^2 &= \left(\frac{ac}{m}\right)^2 + \left(\frac{bd}{m}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{ac}{m}\right) \cdot \left(\frac{bd}{m}\right) \cdot \cos(A + C) \\ \Leftrightarrow m^2 n^2 &= a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cdot \cos(A + C). \end{aligned}$$



Hình 2.6

2.2.4. Định lý Casey

Định lý 2.4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Bốn đường tròn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tiếp xúc với (O) tại A, B, C, D . Gọi $t_{\alpha\beta}$ là độ dài đoạn tiếp tuyến chung ngoài, nếu α và β cùng tiếp xúc ngoài hoặc cùng tiếp xúc trong với (O) và $t_{\alpha\beta}$ là độ dài tiếp tuyến chung trong trong trường hợp ngược lại. Các đại lượng $t_{\beta\gamma}, t_{\gamma\delta}, \dots$ được định nghĩa tương tự. Khi đó ta có

$$t_{\alpha\gamma} \cdot t_{\beta\delta} = t_{\alpha\beta} \cdot t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma} \cdot t_{\delta\alpha}. \quad (2.8)$$

Chứng minh.

Ta chứng minh trường hợp $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cùng tiếp xúc ngoài với (O) . Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Lần lượt đặt tâm các đường tròn trên là A_1, B_1, C_1, D_1 và bán kính lần lượt là x, y, z, t .

Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = m, BD = n$

Áp dụng định lý Pythagoras:

$$(t_{\alpha\beta})^2 = A_1B_1^2 - (x - y)^2 \quad \text{Hình 2.7}$$

Mặt khác theo định lý hàm số cos ta lại có:

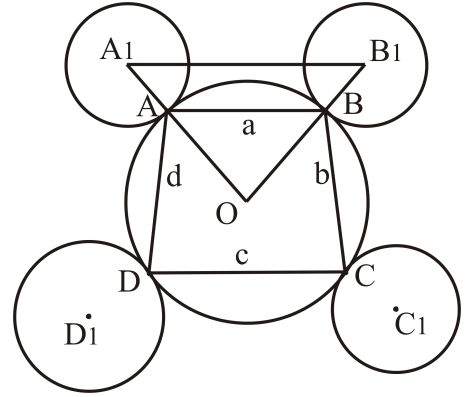
$$\begin{aligned} A_1B_1^2 &= (R + x)^2 + (R + y)^2 - 2(R + x)(R + y) \cdot \cos(\widehat{A_1OB_1}) \\ &= (R + x)^2 + (R + y)^2 - 2(R + x)(R + y) \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{2R^2}\right) \\ &= (R + x)^2 - 2(R + x)(R + y) + (R + y)^2 + (R + x)(R + y) \cdot \frac{\alpha^2}{R^2} \\ &= (x - y)^2 + \frac{\alpha^2}{R^2} \cdot (R + x)(R + y). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{R} \cdot \sqrt{(R + x)(R + y)}.$$

Định nghĩa tương tự với $t_{\beta\gamma}, t_{\gamma\delta}$.

Ta có $t_{\alpha\beta} \cdot t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma} \cdot t_{\alpha\delta} = t_{\alpha\gamma} \cdot t_{\beta\delta} \Leftrightarrow a \cdot c + b \cdot d = m \cdot n$ (định lý Ptolemy).

Ngược lại ta thấy định lý Ptolemy là một trường hợp đặc biệt của định lý Casey khi $x = y = z = t = 0$.



2.2.5. Định lý Carnot

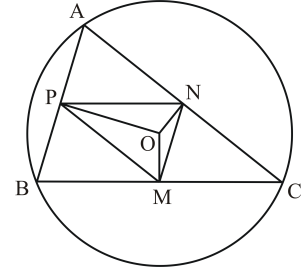
Định lý 2.5. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, r) Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ O tới các cạnh tam giác. Chứng minh rằng $x + y + z = R + r$.

Chứng minh.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Giả sử $x = OM, y = ON, z = OP, BC = a, CA = b, AB = c$.

Tứ giác $OMBP$ nội tiếp, theo đẳng thức Ptolemy ta có $OB \cdot PM = OP \cdot MB + OM \cdot PB$. Do đó

$$R \cdot \frac{b}{2} = z \cdot \frac{a}{2} + x \cdot \frac{c}{2}. \quad (2.9)$$



Hình 2.8

$$\text{Tương tự ta cũng có } R \cdot \frac{c}{2} = y \cdot \frac{a}{2} + x \cdot \frac{b}{2}; \quad R \cdot \frac{a}{2} = y \cdot \frac{c}{2} + z \cdot \frac{b}{2}. \quad (2.10)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} r \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \right) &= [ABC] \\ &= [OBC] + [OCA] + [OAB] = x \cdot \frac{a}{2} + y \cdot \frac{b}{2} + z \cdot \frac{c}{2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Từ (2.9), (2.10) và (2.11) ta có

$$(R + r) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} \right) = (x + y + z) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} \right) \Rightarrow R + r = x + y + z.$$

2.2.6. Bài toán

Chứng minh quan hệ giữa các đại lượng

Bài toán 2.3. (Đề thi chọn đội tuyển Hồng Kông tham dự IMO 2000, HongKong TST 2000) Tam giác ABC vuông có $BC > CA > AB$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC , E là một điểm trên cạnh AB kéo dài về phía điểm A sao cho $BD = BE = CA$. Gọi P là một điểm trên cạnh AC sao cho E, B, D, P nằm trên một đường tròn. Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng: $AQ + CQ = BP$.

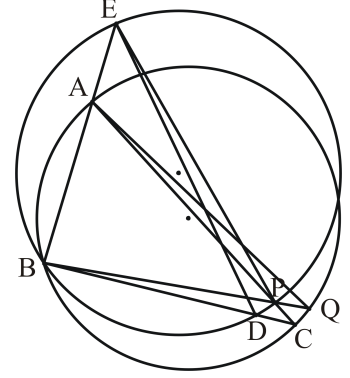
Chứng minh. Xét các tứ giác nội tiếp $ABCQ$ và $BEPD$ ta có $\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{DEF}$ (cùng chắn các cung tròn).

Mặt khác $\widehat{AQC} = 108^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{EPD}$

Xét tam giác AQC và tam giác EPD có $\widehat{DEP} = \widehat{DBP}$ (do $AC = BD$).

Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $BEPD$ ta có $EP.BD + BE.PD = ED.BP$.

Suy ra $AQ.ED + QC.ED = ED.BP$
 $\Rightarrow AQ + QC = BP$ (đpcm).



Hình 2.9

Chứng minh các đẳng thức hình học

Bài toán 2.4. Cho tam giác ABC với BE, CF là các đường phân giác trong. Các tia EF, FE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự tại M và N . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{BM} + \frac{1}{CN} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CM}. \quad (2.12)$$

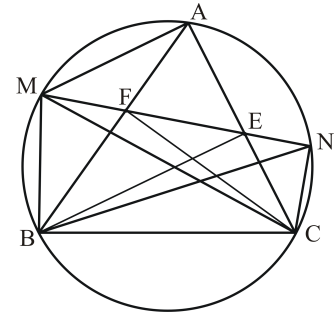
Lời giải.

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$.

Áp dụng định lí Ptolemy cho hai tứ giác nội tiếp $AMBC$ và $ANCB$ ta có:

$$a.AM + b.BM = c.CM, \quad (2.13)$$

$$a.AN + c.CN = b.BN. \quad (2.14)$$



Hình 2.10

Từ (2.13) và (2.14) ta được

$$a.(AM + AN) = b.(BN - BM) + c.(CM - CN). \quad (2.15)$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } \triangle ANF \sim \triangle NBF(g.g) \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{MF}{BF}. \quad (2.16)$$

$$\text{Tương tự } \triangle ANF \sim \triangle MBF(g.g) \Rightarrow \frac{AN}{BM} = \frac{AF}{MF}. \quad (2.17)$$

Từ (2.16), (2.17) và tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{AM.AN}{BM.BN} = \frac{AF}{BF} = \frac{b}{a}. \quad (2.18)$$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{AM.AN}{CM.CN} = \frac{AE}{CE} = \frac{c}{a}. \quad (2.19)$

Từ (2.15), (2.18), (2.19) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.5. Cho P là điểm tùy ý trên cung nhỏ CD của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng

$$PA(PA + PC) = PB(PB + PD). \quad (2.20)$$

Lời giải.

Trong hình vẽ trên ta đặt $AB = a$. Áp dụng định lý Ptolemy cho các tứ giác nội tiếp $PDAB$ và $PABC$ ta có

$$PD.AB + PB.DA = PA.DB;$$

$$PA.BC + PC.AB = PB.AC.$$

Mặt khác $a.(PD + PB) = \sqrt{2}a.PA$ và $a.(PA + PC) = \sqrt{2}a.PB$.

Chia 2 vế tương ứng trong công thức trên cho a ta có

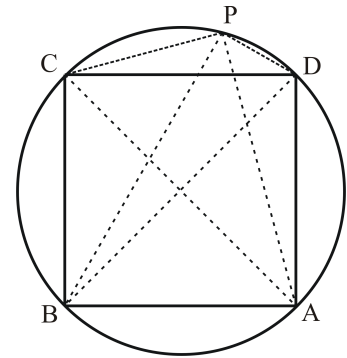
$$PD + PB = \sqrt{2}PA \text{ và } PA + PC = \sqrt{2}PB.$$

Vậy $PA(PA + PC) = \sqrt{2}PA.PB = PB(PB + PD)$, (2.20) được chứng minh.

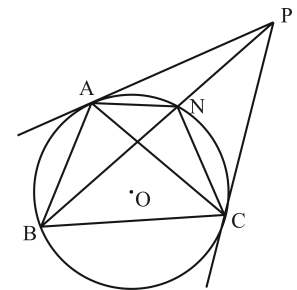
Chứng minh các đặc tính hình học

Bài toán 2.6. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và $AC = 2AB$. Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau ở P . Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung BAC .

Lời giải.



Hình 2.11



Hình 2.12

Gọi giao điểm của BP với đường tròn là N .
Nối AC, NC . Xét tam giác NPC và tam giác CPB có $\widehat{PCN} = \widehat{PBC}$, $\widehat{P}$ chung, nên

$$\Delta NPC \sim \Delta CPB(g.g) \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{NC}{BC}. \quad (2.21)$$

Tương tự ta cũng có

$$\Delta PAN \sim \Delta PBA(g.g) \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AN}{AB}. \quad (2.22)$$

Mặt khác $PA = PC$ (do là 2 tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau).
Nên từ (2.21) và (2.22) ta suy ra

$$\frac{PA}{PB} = \frac{NC}{BC} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow NC \cdot AB = BC \cdot AN. \quad (2.23)$$

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCN$ ta có

$$AN \cdot BC + AB \cdot NC = AC \cdot BN.$$

$$\text{Từ (2.23)} \Rightarrow 2AB \cdot NC = AC \cdot BN = 2AB \cdot BN \Rightarrow NC = BN.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.7. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm G . Giả sử rằng $\widehat{OIA} = 90^\circ$. Chứng minh rằng IG song song với BC .

Lời giải.

Kéo dài AI cắt (O) tại N . Khi đó N là điểm chính giữa cung BC (không chứa A). Ta có

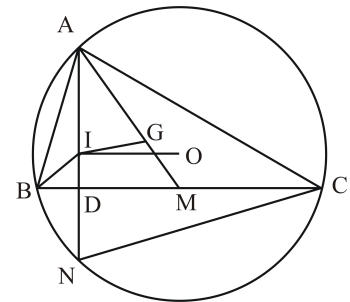
$$BN = NC. \quad (2.24)$$

$$\text{Lại có } \widehat{IBN} = \widehat{BIN} \Rightarrow BN = IN. \quad (2.25)$$

$$\text{Do } OI \perp AN \Rightarrow IA = IN = \frac{1}{2} AN. \quad (2.26)$$

$$\text{Từ (2.24), (2.25), (2.26)}$$

$$\Rightarrow BN = NC = IN = IA. \quad (2.27)$$



Hình 2.13

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABNC$ ta có

$$BN.AC + AB.NC = BC.AN.$$

$$(2.27) \Rightarrow BN.(AC + AB) = 2BN.BC \Rightarrow AC + AB = 2BC. \quad (2.28)$$

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác và (2.28) ta có

$$\frac{AB}{BD} = \frac{IA}{ID} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB + AC}{BD + DC} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{2BC}{BC} = 2 \Rightarrow \frac{IA}{ID} = 2.$$

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác suy ra $\frac{AG}{GM} = 2$.

$$\text{Từ } \frac{IA}{ID} = 2 \text{ và } \frac{AG}{GM} = 2 \Rightarrow \frac{IA}{ID} = 2 = \frac{AG}{GM}.$$

Suy ra IG là đường trung bình của tam giác ADM hay $IG \parallel BC$.

2.3. Tứ giác đặc biệt

2.3.1. Tứ giác nội tiếp đường tròn

Định nghĩa 2.5. Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có 4 đỉnh cùng nằm trên một đường tròn. Đường tròn đó được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Tính chất.

Tính chất 1. Tứ giác nội tiếp có tổng hai góc đối bằng 180° .

Tính chất 2. Tứ giác $ABCD$ có AC cắt BD tại I và $IA.IC = IB.ID$ thì nội tiếp.

Tính chất 3. Tứ giác $ABCD$ có AB cắt CD tại I và $IA.IB = IC.ID$ thì nội tiếp.

Tính chất 4. Tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn xuống một cạnh còn lại dưới một góc bằng nhau thì nội tiếp.

Tính chất 5. Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm cho trước thì nội tiếp.

Tính chất 6. Góc ngoài tại một đỉnh của một tứ giác bằng góc trong đối diện với đỉnh đó của tứ giác ấy thì nội tiếp.

Bài toán 2.8. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 70^\circ$. Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại I . Vẽ hai dây cung IE, IF lần lượt cắt cạnh BC tại M, N .

(a) Tính $\widehat{BIC}$.

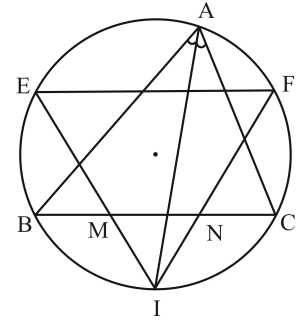
(b) Chứng minh rằng tứ giác $MNFE$ nội tiếp.

Lời giải.

(a) Tứ giác $ABIC$ nội tiếp được nên $\widehat{BAC} + \widehat{BIC} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$. Với $\widehat{BAC} = 70^\circ$ suy ra $\widehat{BIC} = 110^\circ$.

(b) Theo tính chất góc nội tiếp, góc có đỉnh trong đường tròn ta có:

$\widehat{EFN} = \widehat{EMB}$ (chắn những cung bằng nhau)
Mà $\widehat{EMB} + \widehat{EMN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EFN} + \widehat{EMN} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $MNFE$ nội tiếp.



Hình 2.14

Bài toán 2.9. Tỷ số giữa những đường chéo của một tứ giác nội tiếp đường tròn bằng tỷ số tổng những tích các cạnh có chung điểm cuối với đường chéo tương ứng, nghĩa là $\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$.

Lời giải.

Trên đường ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ cho E, F thỏa mãn tính chất

$$\widehat{CDB} = \widehat{ADE}, \quad \widehat{BDA} = \widehat{FCD}. \quad (2.29)$$

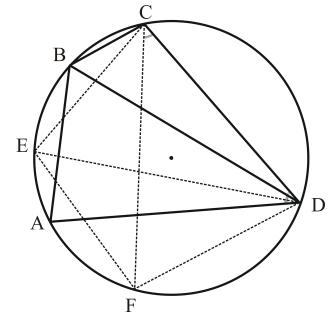
Khi đó ta có $AE = b; FD = a$,

$EC = a, BF = d$.

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $AECD$ và tứ giác $BCDF$ ta nhận được

$$m \cdot ED = ad + bc, \quad n \cdot CF = cd + ab. \quad (2.30)$$

Từ (2.29) ta có $\widehat{CDE} = \widehat{CDB} + \widehat{BDE} = \widehat{ADE} + \widehat{BDE} = \widehat{ADB} = \widehat{FCD}$, từ đó ta tìm được $\widehat{FCD} = \widehat{FDE} + \widehat{EDC} = \widehat{FCE} + \widehat{FCD} = \widehat{ECD}$, nghĩa là $FC = ED$. Vì thế từ (2.30) ta tìm được đẳng thức cần chứng minh.



Hình 2.15

Bài toán 2.10. Cho đường tròn có bán kính $R = 1$. Trên tiếp tuyến tại một điểm A của đường tròn, lấy điểm T với $AT = 1$. Đường thẳng d quay quanh T cắt đường tròn tại B và C . Xác định góc nhọn α giữa đường thẳng d và tiếp tuyến AT sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

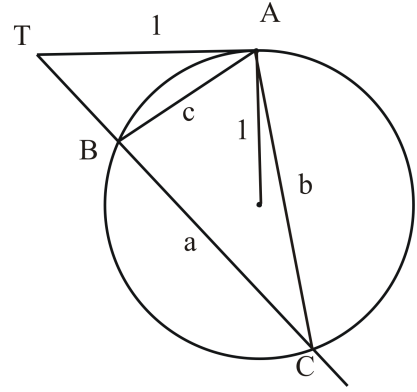
Ta có $TA = R = 1$ với TA là tiếp tuyến.
Suy ra đường thẳng d qua T và cắt đường tròn tại B, C . Khi góc α giữa d và TA là nhọn. $\triangle ABC$ có $B = \alpha + C$,

$$A = \pi - (B + C) = \pi - (\alpha + 2C).$$

Theo định lý hàm số sin thì

$$a = 2R \sin A = 2 \sin (\alpha + 2C),$$

$$c = 2R \sin C = 2 \sin C.$$



Hình 2.16

Ngoài ra $\triangle ATB$ cho

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sin \alpha} &= \frac{AT}{\sin \widehat{ABT}} \Rightarrow \frac{2R \sin C}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin (\alpha + C)} \quad (\text{do } \widehat{ABT} + B = \pi) \\ \Rightarrow \sin \alpha &= 2R \cdot \sin C \cdot \sin (\alpha + C) = 2 \sin C \cdot \sin (\alpha + C) = \cos \alpha - \cos (\alpha + 2C) \\ \Rightarrow \cos (\alpha + 2C) &= \cos \alpha - \sin \alpha. \end{aligned}$$

Diện tích $\triangle ABC$ là:

$$\begin{aligned} S &= [ATC] - [ATB] = \frac{1}{2}TA \cdot TC \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}TA \cdot TB \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}(TC - TB)TA \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}(BC) \cdot \sin \alpha (\text{do } TA = 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin (\alpha + 2C) \cdot \sin \alpha. \\ \Rightarrow S^2 &= \sin^2 (\alpha + 2C) \cdot \sin^2 \alpha \\ &= \sin^2 \alpha \cdot [1 - (\cos \alpha - \sin \alpha)^2] = 2 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha. \\ \Rightarrow S^4 &= 6 \sin^6 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 4 \sin^6 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{4}{3} \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot (3 - 3 \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S^4 &\leq \frac{4}{3} \left(\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 3 - 3 \sin^2 \alpha}{4} \right)^4 \\ \Rightarrow S^4 &\leq \frac{27}{64}.\end{aligned}$$

Vậy $\max S = \sqrt[4]{\frac{27}{64}}$ đạt được khi $\sin^2 \alpha = 3 - 3 \sin^2 \alpha$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Bài toán 2.11. $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với các cạnh $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Chứng minh rằng

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}} \quad \text{với} \quad p = \frac{a+b+c+d}{2}. \quad (2.31)$$

Lời giải.

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp suy ra $A + C = 180^\circ$ suy ra $\cos C = -\cos A$.

Tam giác ABD cho ta $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$. Tam giác BCD cho ta $BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad \cos A &= b^2 + c^2 - 2bc \cos C \\ \Rightarrow \cos A &= \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \\ \Rightarrow 1 - \cos A &= 1 - \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(ad + bc)} \\ \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{(b+c+d-a)(b+c+a-d)}{2(ad + bc)} = \frac{2(p-a)(p-d)}{ad + bc} \\ \Rightarrow \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{(p-a)(p-d)}{ad + bc}.\end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned}1 + \cos A &= 1 + \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{2(p-b)(p-c)}{ad + bc} \\ \Rightarrow \cos^2 \frac{A}{2} &= \frac{2(p-b)(p-c)}{ad + bc}. \text{ Do đó } \tan^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mà } 0 < A < \pi &\Rightarrow 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{A}{2} > 0 \\ \Rightarrow \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-c)(p-d)}}. \end{aligned}$$

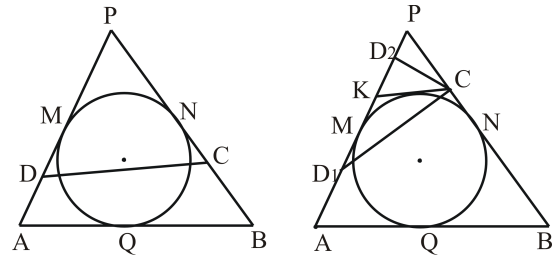
2.3.2. Tứ giác ngoại tiếp đường tròn

Định nghĩa 2.6. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp một đường tròn (O) là tứ giác có tất cả các cạnh tiếp xúc ngoài với đường tròn.

Tính chất 1. $a + c = b + d$.

Chứng minh. Cho tứ giác $ABCD$ thỏa mãn điều kiện $a + c = b + d$ với ký hiệu $DA = a, AB = b, BC = c, CD = d$. Nếu hai cặp cạnh đối diện của tứ giác đều song song thì nó là một hình bình hành. Từ điều kiện $a + c = b + d$ suy ra nó lại là một hình thoi, vậy nó nội tiếp trong đường tròn.

Ta xét trường hợp ít nhất một cặp cạnh của tứ giác cắt nhau. Giả sử đó là hai cạnh AD và BC kéo dài cắt nhau tại điểm P . Ký hiệu M, N và Q là những điểm tiếp xúc của đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABP tương ứng với các cạnh AD, BC và AB . Cho vị trí những điểm C và D có những khả năng sau đây:



Hình 2.17

- (a) C và D nằm tương ứng trên đoạn thẳng BN và AM .
- (b) Ít nhất một trong những điểm C và D nằm bên ngoài đối với đoạn thẳng BN, AM .

Trường hợp (a) không thể xảy ra vì từ

$$\begin{aligned} b &= AQ + QB = AM + BN = (a + DM) + (c + CN) \\ &= (a + c) + (DM + CN) = b + d + DM + CN. \end{aligned}$$

ta nhận được sự vô lý vì đẳng thức $d + DM + CN = 0$.

Trường hợp (b) cho điểm C bên trong đoạn PN , khi đó từ điểm C ta có thể kẻ tiếp tuyến CK với đường tròn (Hình b). Với điểm D có những khả năng sau đây:

(b_1) D là điểm trong của đoạn AK .

(b_2) D là điểm trong của đoạn KP .

(b_3) D trùng với điểm B .

Ta sẽ chứng minh trường hợp (b_1), (b_2) không thể xảy ra.

Trong trường hợp (b_1) ta có theo điều kiện đã cho $AB + CD_1 = BC + AD_1$, mặt khác $AB + KC = AK + CB$.

Vì tứ giác $ABCK$ ngoại tiếp đường tròn (O). Từ hai đẳng thức trên ta nhận được $KC = KD_1 + CD_1$, điều này vô lý.

Trường trường hợp (b_2) tương tự ta có $AB + CD_2 = BC + AD_2$ và $AB + KC = AK + BC$.

Từ hai đẳng thức trên ta nhận được $CD_2 = KD_2 + KC$, điều này vô lý. Vậy chỉ có thể B và D trùng nhau.

Tính chất 2. $ac - bd = AC \cdot BD \cdot \cos \alpha$.

Chứng minh.

Gọi giao điểm của 2 đường chéo tứ giác

$ABCD$ là E . Đặt $AB = a; BC = b;$

$CD = c; DA = d; EA = x;$

$EB = y, EC = z, ED = t, \widehat{AEB} = \alpha$.

Ta đã biết

$$a + c = b + d \Rightarrow (a + c)^2 = (b + d)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(ac - bd) = b^2 + d^2 - a^2 - c^2$$

$$= y^2 + z^2 + 2yz \cos \alpha + x^2 + t^2 + 2xt \cdot \cos \alpha$$

$$- x^2 - y^2 + 2xy \cos \alpha - t^2 - z^2 + 2tz \cos \alpha$$

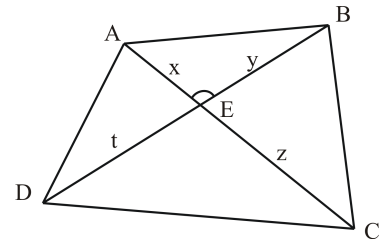
$$= 2 \cos \alpha (xy + yz + zt + tx) = 2 \cos \alpha (x + z)(y + t) = 2 \cos \alpha \cdot AC \cdot BD$$

$$\Rightarrow ac - bd = AC \cdot BD \cdot \cos \alpha.$$

Tính chất 3. Nếu $ac = bd$ và $\alpha = 90^\circ$ thì tứ giác ngoại tiếp là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh. Ta có

$$(a + c)^2 - (b + d)^2 = 2(ac - bd) + (a^2 + c^2) - (b^2 + d^2)$$



Hình 2.18

$$\begin{aligned}
&= 2(ac - bd) + x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha + z^2 + t^2 + 2zt \cos \alpha \\
&\quad - y^2 - z^2 + 2yz \cos \alpha - t^2 - x^2 + 2tx \cos \alpha \\
&= 2(ac - bd) + 2 \cos \alpha (xy + yz + zt + tx).
\end{aligned}$$

(a). Nếu tứ giác nội tiếp và $ac = bd \Rightarrow \alpha = 90^\circ$;

(b). Nếu tứ giác nội tiếp và $\alpha = 90^\circ \Rightarrow ac = bd$;

(c). Nếu $\alpha = 90^\circ$ và $ac = bd \Rightarrow$ tứ giác ngoại tiếp.

Tính chất 4. $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$. Trong đó R_1, R_2, R_3, R_4 tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác $\triangle EAB, \triangle EBC, \triangle ECD, \triangle EDA$.

Chứng minh. Áp dụng công thức tính diện tích tam giác

$$S = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{abc}{4S}; \quad R_1 = \frac{axy}{4 \cdot \frac{1}{2}xy \sin \alpha} = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

$$\text{Tương tự ta có } R_2 = \frac{b}{2 \sin \alpha}; \quad R_3 = \frac{c}{2 \sin \alpha}; \quad R_4 = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

$$R_1 + R_3 = \frac{a + c}{2 \sin \alpha}; \quad R_2 + R_4 = \frac{b + d}{2 \sin \alpha}.$$

$$\text{Vậy } a + c = b + d \Leftrightarrow R_1 + R_3 = R_2 + R_4.$$

Tính chất 5. Tứ giác ngoại tiếp có hai đường chéo vuông góc thì

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}.$$

$$\text{Chứng minh. Ta có } \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{2 \sin \alpha}{a} + \frac{2 \sin \alpha}{c} = \frac{2 \sin \alpha \cdot (a + c)}{ac}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} = \frac{2 \sin \alpha \cdot (b + d)}{bd}.$$

Vậy nếu $a + c = b + d$ và $ac = bd$ nghĩa là

$$\frac{2 \sin \alpha \cdot (a + c)}{ac} = \frac{2 \sin \alpha \cdot (b + d)}{bd} \quad \text{thì} \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}.$$

$$\text{Tính chất 6.} \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_d}.$$

Trong đó h_a, h_b, h_c, h_d tương ứng là độ dài đường vuông góc hạ từ A xuống AB, BC, CD và DA .

Chứng minh. Áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}ah \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{a}{2S}$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_a} &= \frac{a}{xy \sin \alpha}; \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{yz \sin \alpha}; \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{zt \sin \alpha}; \quad \frac{1}{h_d} = \frac{d}{tx \sin \alpha}. \\ \Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} &= \frac{a}{xy \sin \alpha} + \frac{c}{zt \sin \alpha} = \frac{azt + cxy}{xyzt \sin \alpha}. \\ \text{và } \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_d} &= \frac{b}{yz \sin \alpha} + \frac{d}{xt \sin \alpha} = \frac{bxt + dyz}{xyzt \sin \alpha}. \\ \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} &= \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_d} \Leftrightarrow azt + cxy = bxt + dyz \\ \Rightarrow (azt + cxy)^2 &= (bxt + dyz)^2 \\ \Leftrightarrow (azt)^2 + (cxy)^2 + 2aztcxy &= (bxt)^2 + (dyz)^2 + 2bxt dyz. \end{aligned}$$

Theo định lý hàm số cosin

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha)z^2t^2 &+ (z^2 + t^2 - 2tz \cos \alpha)x^2y^2 + 2aztcxy \\ &= (y^2 + z^2 - 2yz \cos \alpha)x^2t^2 + (x^2 + z^2 - 2xz \cos \alpha)y^2z^2 + 2bxt dyz \\ \Leftrightarrow 2xyzt(ac - bd) &= 2xyzt(xy + yz + zt + tx) \cos \alpha \\ \Leftrightarrow ac - bd &= (xy + yz + zt + tx) \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow ac - bd &= (x + z)(y + t) \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow (a + c)^2 &= (b + d)^2 \\ \Leftrightarrow a + c &= b + d \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Tính chất 7. Tứ giác ngoại tiếp có hai đường chéo vuông góc thì

$$h_a + h_b = h_c + h_d.$$

Chứng minh. Theo công thức $S = \frac{1}{2}ah$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } h_a &= \frac{xy \sin \alpha}{a}; \quad h_b = \frac{yz \sin \alpha}{b}; \quad h_c = \frac{zt \sin \alpha}{c}; \quad h_d = \frac{tx \sin \alpha}{d}. \\ h_a + h_c &= h_b + h_d \Leftrightarrow \frac{(cxy + azt) \sin \alpha}{ac} = \frac{(btx + dyz) \sin \alpha}{bd}. \end{aligned}$$

Vậy nếu có thêm $ac = bd \Rightarrow cxy + azt = btx + dyz$

$$\Rightarrow ac - bd = \cos \alpha . AC . BD = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0.$$

Tính chất 8. Tứ giác ngoại tiếp có hai đường chéo vuông góc thì

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

Trong đó r_1, r_2, r_3, r_4 tương ứng là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác $\triangle EAB, \triangle EBC, \triangle ECD, \triangle EDA$.

Chứng minh. Ta có $S = pr \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} &= \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} \\ \Leftrightarrow \frac{p_1}{S_1} + \frac{p_3}{S_3} &= \frac{p_2}{S_2} + \frac{p_4}{S_4} \\ &= \frac{x+y+a}{\frac{2}{xy \sin \alpha}} + \frac{z+t+c}{\frac{2}{zt \sin \alpha}} + \frac{y+z+b}{\frac{2}{yz \sin \alpha}} + \frac{x+t+d}{\frac{2}{xt \sin \alpha}} \\ \Leftrightarrow \frac{x+y+a}{xy} + \frac{z+t+c}{zt} &= \frac{y+z+b}{yz} + \frac{x+t+d}{xt} \\ \Leftrightarrow azt + cxy &= bxt + dyz \\ \Rightarrow ac - bd &= \cos \alpha . AC . BD = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0. \end{aligned}$$

Tính chất 9.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_d}.$$

Trong đó r_a, r_b, r_c, r_d tương ứng là bán kính đường tròn bàng tiếp các cạnh a, b, c, d của các tam giác $\triangle EAB, \triangle EBC, \triangle ECD, \triangle EDA$.

Chứng minh. Áp dụng $S = (p - a)r_a$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} &= \frac{1}{r_d} + \frac{1}{r_b} \\ \Leftrightarrow \frac{p_1 - a}{S_1} + \frac{p_3 - c}{S_3} &= \frac{p_2 - b}{S_2} + \frac{p_4 - d}{S_4} \\ &= \frac{x+y-a}{\frac{2}{xy \sin \alpha}} + \frac{z+t-c}{\frac{2}{zt \sin \alpha}} + \frac{y+z-b}{\frac{2}{yz \sin \alpha}} + \frac{x+t-d}{\frac{2}{xt \sin \alpha}} \\ \Leftrightarrow \frac{x+y-a}{2} + \frac{z+t-c}{2} &+ \frac{y+z-b}{2} + \frac{x+t-d}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{x+y-a}{xy} + \frac{z+t-c}{zt} = \frac{y+z-b}{yz} + \frac{x+t-d}{xt} \\
&\Leftrightarrow azt + cxy = bxt + dyz \\
&\Rightarrow ac - bd = \cos \alpha \cdot AC \cdot BD = 0 \quad (tc2).
\end{aligned}$$

Tính chất 10. $p_1 + p_3 = p_2 + p_4$.

Trong đó p_1, p_2, p_3, p_4 tương ứng là chu vi của các tam giác $\triangle EAB, \triangle EBC, \triangle ECD, \triangle EDA$.

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{x+y+a}{2}; \quad p_2 = \frac{y+z+b}{2}; \quad p_3 = \frac{z+t+c}{2}; \quad p_4 = \frac{t+x+d}{2} \\
p_1 + p_3 &= \frac{x+y+a}{2} + \frac{z+t+c}{2} = \frac{x+y+z+t}{2} + \frac{(a+c)}{2} \\
p_2 + p_4 &= \frac{y+z+b}{2} + \frac{t+x+d}{2} = \frac{x+y+z+t}{2} + \frac{(b+d)}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy $p_1 + p_3 = p_2 + p_4 \Leftrightarrow$ tứ giác ngoại tiếp.

2.3.3. Tứ giác đồng thời nội và ngoại tiếp

Một số tính chất của tứ giác đồng thời nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn. Những tứ giác này có tính chất sau:

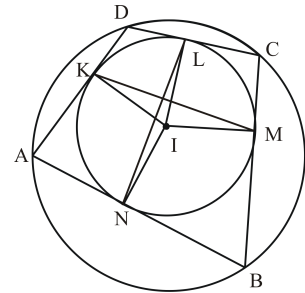
$$mn = ac + bd, \quad a + c = b + d. \quad (2.32)$$

Bài toán 2.12. Một tứ giác đồng thời nội, ngoại tiếp đường tròn. Những đoạn thẳng nối những điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp trên các cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Lời giải.

Ký hiệu như hình bên. Ở đây I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác, P là giao điểm của LN và KM . góc $\widehat{LPK} = \alpha$ ta có:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2} \text{sd}KL + \frac{1}{2} \text{sd}MN = \frac{1}{2} \widehat{KOL} + \frac{1}{2} \widehat{MON} \\
&= \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{KDL}) + \frac{1}{2} (180^\circ - \widehat{MBN}) \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2} (\widehat{KDL} + \widehat{MBN})
\end{aligned}$$



Hình 2.19

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Bài toán 2.13. Nếu một tứ giác ngoại tiếp một đường tròn và những đoạn thẳng nối những điểm tiếp xúc của đường tròn với các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau thì nó nội tiếp trong một đường tròn.

Lời giải. Từ đẳng thức $\alpha = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{KDL} + \widehat{MBN})$ ở bài trên với điều kiện $\alpha = 90^\circ$ ta suy ra $\widehat{KDL} + \widehat{MBN} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

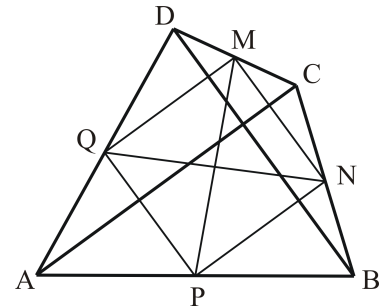
2.3.4. Tứ giác với những đường chéo vuông góc

Bài toán 2.14. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi những đường trung tuyến của chúng bằng nhau.

Lời giải. Dễ thấy tứ giác $MNPQ$ là một hình bình hành vì các cạnh đối của chúng song song với đường chéo của tứ giác $ABCD$.

Cho $AC \perp BD$ khi đó tứ giác $MNPQ$ là một hình chữ nhật và suy ra hai đường chéo MP và NQ bằng nhau.

Ngược lại, cho các đường trung tuyến $MP = NQ$. Khi đó hình bình hành $MNPQ$ là hình chữ nhật, $QM \parallel AC$ và $QM \perp MP \Rightarrow AC \perp MP$ mà $MP \parallel BD$ suy ra $AC \perp DB$.



Hình 2.20

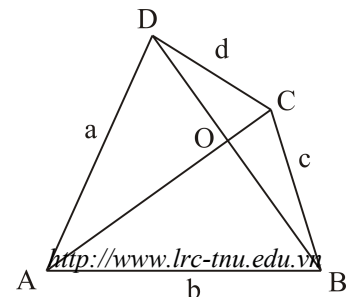
Bài toán 2.15. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2. \quad (2.33)$$

Lời giải.

Cho $AC \perp BD$. Từ định lý Pythagoras ta có

$$a^2 + c^2 = (AO^2 + DO^2) + (OB^2 + OC^2)$$



Hình 2.21

$$\begin{aligned}
&= (AO^2 + BO^2) + (DO^2 + CO^2) \\
&= b^2 + d^2.
\end{aligned}$$

Ngược lại cho đẳng thức (2.33) được thoả mãn. Giả sử AC và BD không vuông góc với nhau và $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ là góc nhọn. Khi đó $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ là góc tù. Từ định lý Cosin về độ dài các cạnh trong một tam giác, ta có

$$\begin{aligned}
a^2 + c^2 &< (AO^2 + DO^2) + (CO^2 + OB^2) \\
&= (AO^2 + BO^2) + (DO^2 + CO^2) \\
&< b^2 + d^2 \quad (\text{điều này trái với giả thiết}).
\end{aligned}$$

2.4. Công thức diện tích của tứ giác

2.4.1. Công thức diện tích của tứ giác nội tiếp

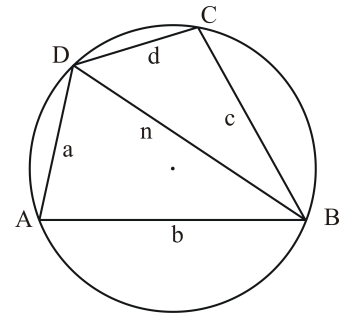
Định lý 2.6. (Công thức Brahmagupt). Ký hiệu S là diện tích của tứ giác nội tiếp $ABCD$ với độ dài các cạnh là a, b, c, d và p là nửa chu vi. Khi đó

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad (2.34)$$

Chứng minh.

Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp trong đường tròn. Độ dài đường chéo BD là n . Theo giả thiết $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên ta có $\cos A = -\cos C$ và $\sin A = \sin C$. Viết cách khác

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 - 2ab \cos A &= n^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos C. \\
\Leftrightarrow 2(ab + cd) \cos A &= a^2 + b^2 - c^2 - d^2. \quad (2.35)
\end{aligned}$$



Hình 2.22

$$\text{Từ đó } S = \frac{1}{2}ab \sin A + \frac{1}{2}cd \sin C = \frac{1}{2}(ab + cd) \sin A.$$

Rút gọn ta có

$$2(ab + cd) \sin A = 4S. \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Từ (2.35) và (2.36) ta được } 4(ab + cd)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 16S^2 \\
\Rightarrow 16S^2 &= (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2. \\
&= (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\
&= (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) \\
&= ((a + b)^2 - (c - d)^2)((c + d)^2 - (a - b)^2) \\
&= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b) \\
&= (2p - 2d)(2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2a).
\end{aligned}$$

Bởi vậy $S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$.

Khi $d = 0$ ta có $S_{ABC}^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$ chính là công thức Heron về diện tích tam giác đã biết.

2.4.2. Công thức diện tích của tứ giác ngoại tiếp

Định lý 2.7. Diện tích của mọi tứ giác ngoại tiếp đường tròn được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 n^2 - (ac - bd)^2}. \quad (2.37)$$

Chứng minh. Theo (2.32) ta có

$$\begin{aligned}
2mn + a^2 + c^2 - b^2 - d^2 &= 2mn + (a + c)^2 - 2ac - (b + d)^2 + 2bd \\
&= 2(mn - ac + bd).
\end{aligned}$$

và tương tự ta có $2mn - a^2 - c^2 + b^2 + d^2 = 2(mn + ac - bd)$.

Thay các đẳng thức trên vào công thức

$$4S = \sqrt{(2mn + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2mn - a^2 - c^2 + b^2 + d^2)}.$$

$$\text{Ta được } S = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 n^2 - (ac - bd)^2}.$$

2.4.3. Công thức diện tích của tứ giác đồng thời nội tiếp và ngoại tiếp

Định lý 2.8. Diện tích của một tứ giác đồng thời nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn được biểu diễn theo độ dài các cạnh của tam giác bằng đẳng thức

$$S = \sqrt{abcd}. \quad (2.38)$$

Chứng minh. Từ đẳng thức $mn = ac + bd$ ta có

$$(mn)^2 - (ac - bd)^2 = (ac + bd)^2 - (ac - bd)^2 = 4abcd.$$

Thay vào công thức $S = \frac{1}{2}\sqrt{m^2n^2 - (ac - bd)^2} \Rightarrow S = \sqrt{abcd}$.

2.4.4. Công thức diện tích của tứ giác lồi bất kỳ

Định lý 2.9. Diện tích của tứ giác lồi $ABCD$ được tính theo công thức

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2 \left(\frac{A+C}{2} \right)}. \quad (2.39)$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= [ABCD] = [ABD] + [BDC] = \frac{ad \sin A}{2} + \frac{bc \sin C}{2} \\ \Leftrightarrow 4S^2 &= (ad)^2 \sin^2 A + (bc)^2 \sin^2 C + 2abcd \sin A \sin C. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Mặt khác ta tại có

$$\begin{aligned} a^2 + d^2 - 2ad \cos A &= b^2 + c^2 - 2bc \cos C \\ \Leftrightarrow \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} &= (ad)^2 \cos^2 A + (bc)^2 \cos^2 C - 2abcd \cos A \cos C. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Cộng tương ứng 2 vế của (2.40) và (2.41) ta được

$$4S^2 + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd \cdot \cos(A+C).$$

Công thức này có thể được biến đổi thành

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a) \\ &\quad - 16abcd \cdot \cos^2 \left(\frac{A+C}{2} \right). \end{aligned}$$

Đặt $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ ta có

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - 16abcd \cdot \cos^2 \left(\frac{A+C}{2} \right) \\ \Rightarrow S &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2 \left(\frac{A+C}{2} \right)}. \end{aligned}$$

2.5. Tứ giác điều hoà và tính chất

2.5.1. Hàng điểm điều hoà

Định nghĩa 2.7. Bốn điểm A, B, C, D trên một trục lập thành một hàng điểm điều hoà và được ký hiệu $(ABCD) = -1$, nếu

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}. \quad (2.42)$$

2.5.2. Tứ giác điều hoà

Định nghĩa 2.8. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn được gọi là tứ giác điều hoà, nếu các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại A và C cắt nhau tại một điểm trên đường thẳng (BD) , và ngược lại, các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại các điểm B và D cắt nhau tại một điểm trên đường thẳng AC .

Định nghĩa 2.9. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp và thoả mãn $\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$ được gọi là tứ giác điều hoà.

Định lý 2.10. *Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hoà khi và chỉ khi*

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC. \quad (2.43)$$

Chứng minh.

(a) *Phần thuận.* Giả sử các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ tại A và C cắt nhau tại P nằm trên đường thẳng BD . Khi đó, hai tam giác $\triangle ABP, \triangle DAP$ đồng dạng, nên

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{AP}. \quad (2.44)$$

Tương tự, hai tam giác $\triangle CBP, \triangle DCP$ đồng dạng, nên

$$\frac{DC}{BC} = \frac{CP}{BP} = \frac{AP}{BP}. \quad (2.45)$$

Từ (2.44) và (2.45) suy ra

$$\frac{AB}{AD} \cdot \frac{DC}{BC} = 1 \Leftrightarrow AB \cdot DC = AD \cdot BC. \quad (2.46)$$

(b) *Phần đảo.* Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có tính chất (2.10). Gọi E, F lần lượt là chân các đường phân giác trong và ngoài của góc B , suy ra cũng là chân các đường phân giác trong và ngoài của góc D . Dựng đường tròn Apollonius tâm (I) đường kính EF . Rõ ràng B và D thuộc đường tròn (I) . Vì $(ACEF) = -1$ và I là trung điểm của EF , nên $IB^2 = IE^2 = IA \cdot IC$. Suy ra IB là tiếp tuyến của (O) tại B . Tương tự, ta có ID là tiếp tuyến của (O) tại D . Tương tự các tiếp tuyến của (O) tại A và C gặp nhau tại một điểm trên đường thẳng BD .

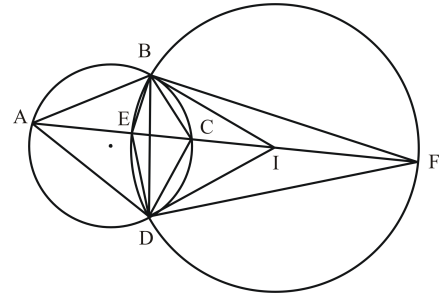
Nhận xét. Nhận xét rằng hệ thức (2.46) có thể dùng làm định nghĩa tứ giác điều hoà.

2.5.3. Tính chất của tứ giác điều hoà

Tính chất 1. Cho tứ giác điều hoà $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC} = k$, thì (O) trực giao với đường tròn Apollonius tỉ số k dựng trên đoạn AC .

Chứng minh. Gọi E, F lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài của góc B .

Khi đó đường tròn Apollonius tỉ số k là đường tròn tâm I đường kính EF , rõ ràng $B, D \in (I)$. Ta cần chứng minh IB là tiếp tuyến của (O) , Thực vậy, ta có $(ACEF) = -1$ và I là trung điểm EF nên $IE^2 = IA \cdot IC$ mà tam giác IBE cân tại I , suy ra $IE = IB$, do đó $IB^2 = IA \cdot IC$ suy ra IB là tiếp tuyến của (O) (đpcm).



Hình 2.23

Tính chất 2. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) là tứ giác điều hoà khi và chỉ khi AC , tiếp tuyến tại B , tiếp tuyến tại D của (O) đồng quy (AC, BD khác đường kính).

Chứng minh.

Chiều thuận: Đúng theo tính chất 1.

Chiều nghịch: Đúng theo định nghĩa.

Tính chất 3. Cho $ABCD$ là tứ giác điều hòa thì

$$AC.BD = 2AB.CD = 2BC.AD.$$

Chứng minh.

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ điều hòa} \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow AB.CD = AD.CB.$$

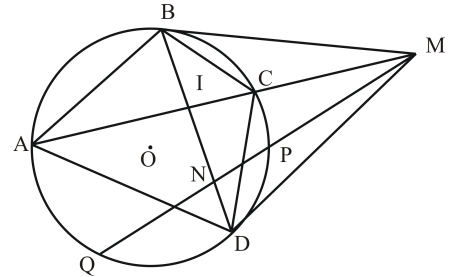
Mặt khác ta có $ABCD$ nội tiếp nên theo định lý Ptolemy thì $AC.BD = AB.CD + AD.BC$.

$$\text{Do đó } AC.BD = 2.AB.CD = 2.AD.BC.$$

Tính chất 4. Cho tứ giác điều hòa $ABCD$ nội tiếp (O) , tiếp tuyến tại B và D cắt nhau tại M , I là giao điểm của AC và BD . Khi đó $(MIAC) = -1$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{MC}{MA} &= \frac{[MCD]}{[MAD]} = \frac{CD \cdot \sin \widehat{MDC}}{AD \cdot \sin \widehat{MDA}} \\ \text{và } \frac{IC}{IA} &= \frac{[IBC]}{[ICB]} = \frac{BC \cdot \sin \widehat{IBC}}{BA \cdot \sin \widehat{IBA}}. \\ \text{Mà } \frac{CD}{AD} &= \frac{BC}{AB}; \quad \sin \widehat{ABI} = \sin \widehat{ADM}, \\ \sin \widehat{IBC} &= \sin \widehat{MDC} \\ \text{Suy ra } \frac{MC}{MA} &= \frac{IC}{IA} \Rightarrow (MICA) = -1. \end{aligned}$$



Hình 2.24

Nhận xét: Cho một điểm M nằm ngoài

đường tròn, từ M vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến (O) . Một cát tuyến qua M cắt (O) tại P, Q và cắt AB tại N thì $(MNPQ) = -1$.

Tính chất 5. Cho tứ giác điều hòa $ABCD$ nội tiếp (O) , gọi M là giao của hai tiếp tuyến của (O) tại B và D . Gọi I là giao điểm của OM và BD . Khi đó IB là phân giác của góc $\widehat{AIC}$.

Chứng minh. Ta có AC cắt BD tại K thì $(MKAC) = -1$. Ta có $I(MKAC) = -1$ và IM vuông góc IK nên IM, IK lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{AKC}$.

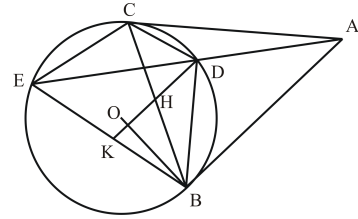
2.5.4. Bài toán

Bài toán 2.16. Từ điểm A nằm ngoài (O) , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm) và cát tuyến ADE . Qua D kẻ đường thẳng vuông góc OB cắt BC, BE lần lượt tại H, K . Chứng minh $DH = HK$

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của BC và ED , ta có tứ giác $ECDB$ là tứ giác điều hoà nên $B(EDIA) = -1$.

Mà $DK // AB$ (cùng vuông góc với OB). Do đó H là trung điểm của DK (đpcm).



Hình 2.25

Bài toán 2.17. (Đề thi chọn đội tuyển Toán Việt Nam dự thi IMO 2001). Trong mặt phẳng cho hai đường tròn C_1 và C_2 cắt nhau tại A và B . Một tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc với C_1 ở P và C_2 ở T . Các tiếp tuyến tại P và T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S . Gọi H là điểm đối xứng của B qua PT . Chứng minh rằng A, H, S thẳng hàng.

Lời giải.

Ta chỉ cần chứng minh $APHT$ là tứ giác điều hoà. Ta chứng minh $APHT$ nội tiếp, thật vậy ta có $\widehat{BPT} = \widehat{PAB}$ và $\widehat{BTP} = \widehat{BAT}$.

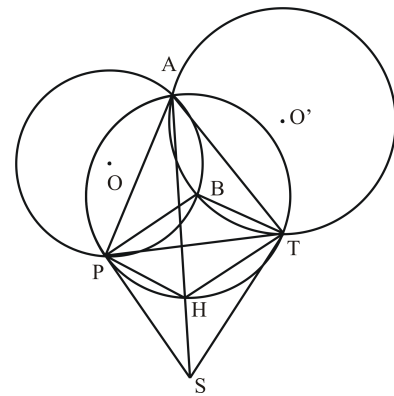
Suy ra $\widehat{BPT} + \widehat{BTP} = \widehat{PAT}$ hay $\widehat{PAT} = 180^\circ - \widehat{BPT} = 180^\circ - \widehat{PHT}$.

Do đó tứ giác $APHT$ nội tiếp. Gọi M là giao điểm của AB và PT .

Ta có $MB.MA = MP^2$ và $MB.MA = MT^2$ nên $MP = MT$. Ta có $\triangle MPB \sim \triangle MAP$, suy ra $\frac{BP}{AP} = \frac{MB}{MP}$.

Tương tự thì $\frac{BT}{AT} = \frac{MB}{MT}$. Suy ra $\frac{BP}{AP} = \frac{BT}{AT}$.

Hơn nữa ta có $BP = HP$ và $BT = HT$. Do đó $\frac{AP}{AT} = \frac{HP}{HT}$.



Hình 2.26

Từ đó ta có tứ giác $APHT$ là tứ giác điều hòa, theo tính chất 2 thì A, H, S thẳng hàng.

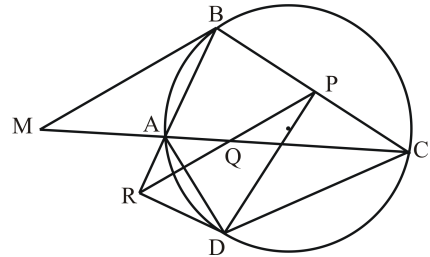
Bài toán 2.18. (Bài 1 trong kỳ thi Olympic Toán Quốc tế năm 2003). Giả sử $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q, R là chân các đường vuông góc hạ từ D lần lượt trên các đường thẳng BC, CA và AB . Chứng tỏ rằng $PQ = QR$ khi và chỉ khi phân giác của các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt nhau trên AC

Lời giải. Ta biết rằng P, Q, R thẳng hàng (đường thẳng Simson). Qua B vẽ đường thẳng song song với PR cắt AC tại M . Phân giác của góc B và D cắt nhau tại một điểm trên AC khi và chỉ khi $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$ và $QP = QR$ khi và chỉ khi $(MQAC) = -1$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh tứ giác $ABCD$ điều hòa khi và chỉ khi $(MQAC) = -1$.

$$\text{Ta có } \frac{AM}{AQ} = \frac{AB}{AR} \text{ và } \frac{CM}{CQ} = \frac{CB}{CP}.$$

Mặt khác $\triangle DAR \sin \triangle DCP$ (gg),
suy ra $\frac{AR}{CP} = \frac{DA}{DC}$. Do đó



Hình 2.27

$$\begin{aligned} (MQAC) = -1 &\Leftrightarrow \frac{AM}{AQ} = \frac{CM}{CQ} \Leftrightarrow \frac{AB}{AR} = \frac{CB}{CP} \\ &\Leftrightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AR}{CP} \Leftrightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{DA}{DC}. \end{aligned}$$

Bài toán 2.19. Trong mặt phẳng cho hai đường tròn C_1 tâm O_1 và đường tròn C_2 tâm O_2 cắt nhau tại hai điểm A và B . Các tiếp tuyến tại A và B của C_1 cắt nhau tại K . Giả sử M là một điểm nằm trên C_1 nhưng không trùng với A và B . Đường thẳng AM cắt lại C_2 tại P , đường thẳng KM cắt C_1 tại C và đường thẳng AC cắt C_2 tại Q .

(a). Chứng minh trung điểm PQ thuộc đường thẳng MC .

(b). Đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên C_1 .

Lời giải.

(a). Gọi N là giao điểm của MK và PQ , ta chứng minh N là trung điểm của PQ . Ta có tứ giác $AMBC$ là tứ giác điều hòa nên $\frac{AC}{AM} = \frac{CB}{MB}$.

Ta có $\triangle MBP \sim \triangle CBQ(g.g)$, suy ra $\frac{CB}{MB} = \frac{CQ}{MP}$. Từ đó ta có $\frac{AC}{AM} = \frac{CQ}{MP}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác APQ với cát tuyến MKN thì $\frac{NP}{NQ} \cdot \frac{MP}{MA} \cdot \frac{CA}{CQ} = 1$.

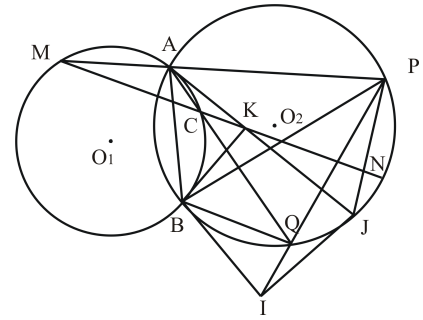
Từ đó ta có $NP = NQ$ hay N là trung điểm của PQ .

(b). Gọi J là giao điểm của AK và (C_2) , suy ra J cố định. Ta chứng minh tứ giác $BQJP$ điều hòa.

Ta có $\widehat{CMB} = \widehat{BAC} = \widehat{BPQ}$ và $\widehat{MBC} = \widehat{CAP} = \widehat{PBQ}$, suy ra $\triangle CBM \sim \triangle QBP(g.g)$, từ đó $\frac{BC}{BM} = \frac{BQ}{BP}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $\frac{AC}{AM} = \frac{JQ}{JP}$.

Mà $\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AM}$ nên $\frac{BQ}{BP} = \frac{JQ}{JP}$, suy ra tứ giác $BQJP$ là tứ giác điều hòa. Do đó PQ đi qua giao điểm I của hai tiếp tuyến vẽ từ B và J của (C_2) .



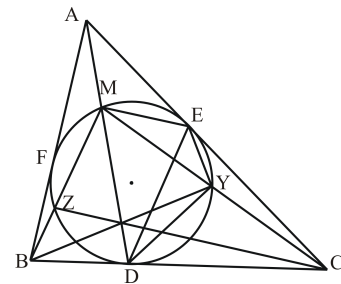
Hình 2.28

Bài toán 2.20. Cho tam giác ABC . Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với BC, AC và AB lần lượt tại D, E, F . AD cắt (I) tại điểm thứ hai là M , BM, CM cắt (I) tại Y và Z . Chứng minh rằng BZ, CY và AD đồng quy.

Lời giải.

Tứ giác $MEYD$ là tứ giác điều hòa nên ta có $MY \cdot DE = 2ME \cdot DY$, suy ra $\frac{MY}{YC} = \frac{2ME \cdot DY}{YC \cdot DE}$.

Tứ giác $MFZD$ là tứ giác điều hòa nên ta có $MZ \cdot DF = 2MF \cdot DZ$, suy ra $\frac{BZ}{MZ} = \frac{BZ \cdot DF}{2MF \cdot DZ}$.



Hình 2.29

Do đó ta có

$$\frac{DC.YM.ZB}{DB.YC.ZM} = \frac{DC}{DB} \cdot \frac{2ME.DY}{YC.DE} \cdot \frac{BZ.DF}{2MF.DZ}. \quad (2.47)$$

Mặt khác tứ giác $MEDF$ điều hòa nên $\frac{ME}{MF} = \frac{DE}{DF}$.

$$\Rightarrow (2.47) \Leftrightarrow \frac{DC}{DB} \cdot \frac{DY}{DZ} \cdot \frac{BZ}{CY}$$

Mà $\frac{CY}{DY} = \frac{CD}{DM} = \frac{BZ}{BD} = \frac{DZ}{DM}$. Suy ra $\frac{DC}{DB} \cdot \frac{DY}{DZ} \cdot \frac{BZ}{CY} = 1$.

Vậy $\frac{DC.YM.ZB}{DB.YC.ZM} = 1$ nên theo định lý Ceva thì MD, BY, CZ đồng quy.

Chương 3

Các đường thẳng đồng quy

Trong chương này trình bày một số định lý về các đường thẳng đồng quy. Để giảm đi độ phức tạp tác giả không đưa vào độ dài đại số ở một số định lý, bài toán và phần chứng minh. Nếu đưa vào độ dài đại số thì kết quả có thể sai khác -1.

3.1. Định lý Ceva

Định lý 3.1. (Định lý Ceva) Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB . Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi

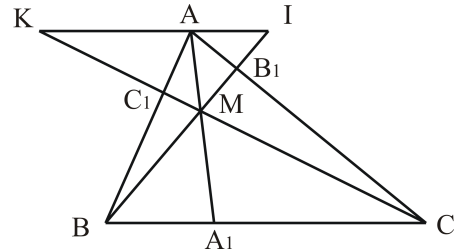
$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1. \quad (3.1)$$

Chứng minh.

Chiều thuận: Cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy, ta chứng minh (3.1).

Giả sử BB_1, CC_1 cắt đường thẳng qua A song song với BC lần lượt tại I và K . Áp dụng định lý Thales ta có:

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IA}}; \quad \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{\overline{AK}}{\overline{BC}}. \quad (3.2)$$



Hình 3.1

Hơn nữa ta có

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MA_1}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{A_1C}} \Rightarrow \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AK}}. \quad (3.3)$$

$$\text{Từ (3.2) và (3.3) ta có } \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{AK}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AI}} \cdot \frac{\overline{AK}}{\overline{BC}} = -1.$$

Chiều nghịch: Giả sử ta có hệ thức (3.1), ta cần chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Gọi M là giao điểm của AA_1 và BB_1 , C' là giao điểm của CP và AB . Khi đó áp dụng phần trên ta có

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1. \quad (3.4)$$

Từ (3.1) và (3.4) ta có $\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \Rightarrow C_1 \equiv C'$ (Do C_1 và C' cùng thuộc cạnh AB). Vậy AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại P (đpcm).

Bộ ba đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy như trên được gọi là bộ ba đường thẳng Ceva và các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 gọi là bộ ba đoạn thẳng Ceva. Định lý Ceva là định lý cơ bản nhất dùng để chứng minh các đường thẳng đồng quy.

3.2. Một số mở rộng của định lý Ceva trong mặt phẳng

3.2.1. Định lý Ceva dạng sin

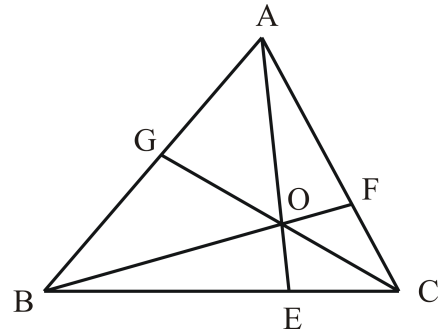
Định lý 3.2. Gọi E, F, G là ba điểm tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC . Ba đường thẳng AE, BF, CG cắt nhau tại một điểm O khi và chỉ khi

$$\frac{\sin \widehat{ABF}}{\sin \widehat{CBF}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCG}}{\sin \widehat{ACG}} \cdot \frac{\sin \widehat{CAE}}{\sin \widehat{BAE}} = 1. \quad (3.5)$$

Chứng minh.

Chiều thuận. Giả sử AE, BF, CG đồng quy tại O . Khi đó hai tam giác ABE và ACE có cùng chiều cao hạ từ đỉnh A .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{BE}{BC} &= \frac{[ABE]}{[ACE]} \\ &= \frac{AB \cdot AE \cdot \sin \widehat{BAE}}{AC \cdot AE \cdot \sin \widehat{CAE}} = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAE}}{AC \cdot \sin \widehat{CAE}}. \end{aligned}$$



Hình 3.2

$$\Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAE}}{AC \cdot \sin \widehat{CAE}}. \quad (3.6)$$

Tương tự ta có

$$\frac{CF}{FA} = \frac{BC \cdot \sin \widehat{CBF}}{BA \cdot \sin \widehat{ABF}} = \frac{AG}{GB} = \frac{CA \cdot \sin \widehat{ACG}}{CB \cdot \sin \widehat{BCG}}. \quad (3.7)$$

Nhân tương ứng 2 vế của (3.6) và (3.7) ta được

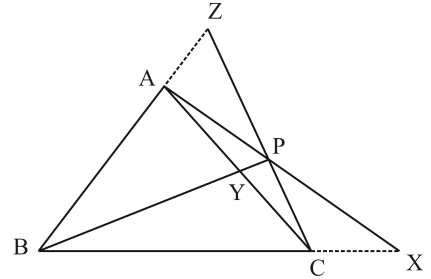
$$\frac{\sin \widehat{BAE}}{\sin \widehat{CAE}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBF}}{\sin \widehat{ABF}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACG}}{\sin \widehat{BCG}} = \frac{BE}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AG}{GB} = 1.$$

Chiều nghịch. Chứng minh tương tự định lý Ceva.

3.2.2. Mở rộng định lý Ceva trong mặt phẳng

(a). Trường hợp 1. Ta xét trường hợp ba điểm nằm trên ba cạnh của tam giác, trong đó có hai điểm thuộc phần kéo dài của hai cạnh tương ứng khi đó điểm đồng quy nằm ngoài tam giác.

Phương pháp cơ bản giống như trước đây, nói riêng nên cộng vào hay là trừ diện tích của các hình khác nhau. Hình học tiêu chuẩn mẫu không có con đường để chỉ ra vị trí của điểm A nằm trên cạnh AZ (xem hình).



Hình 3.3

Ta chọn đưa vào khái niệm dương và âm độ dài. Trong hình, BX có độ dài dương, vì BX nằm trên cùng một phía với C trên BC. XC có độ dài âm, vì XC nằm ở phía bên kia C như cạnh bên của tam giác. Tương tự AZ có độ dài âm trong khi đó các đoạn khác có độ dài dương. Mở rộng độ dài âm có diện tích âm.

Các tam giác $\triangle ABX$ và $\triangle ACX$ là hai tam giác có cùng chiều cao, do đó tỉ lệ giữa các cạnh là tỉ lệ thuận về diện tích tương ứng. Tương tự ta cũng có $\triangle PBX$ và $\triangle PCX$ cũng có cùng chiều cao. Vì vậy ta có

$$\frac{BX}{XC} = \frac{[ABX]}{[ACX]} = \frac{[PBX]}{[PCX]} = \frac{[ABX] - [PBX]}{[ACX] - [PCX]} = \frac{[ABP]}{[CAP]}.$$

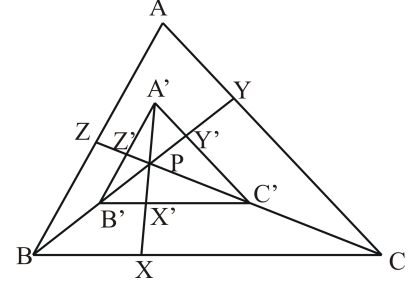
$$\text{Tương tự ta cũng có } \frac{CY}{YA} = \frac{[BCP]}{[ABP]} \quad \text{và} \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{[CAP]}{[BCP]}.$$

Nhân 2 vế tương ứng của ba đẳng thức trên ta được.

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{[ABP]}{[CAP]} \cdot \frac{[BCP]}{[ABP]} \cdot \frac{[CAP]}{[BCP]} = 1.$$

(b). Trường hợp 2. Hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có các cạnh tương ứng song song (như hình vẽ), khi đó AA', BB', CC' đồng quy.

Nghiệm 1 (Sử dụng định lý Ceva). Mở rộng của BB' cắt $A'C'$ tại Y' và cắt AC tại Y , mở rộng của CC' cắt $A'B'$ tại Z' và cắt AB tại Z .



Hình 3.4

Gọi P là giao điểm của BB' và CC' . Kéo dài $A'P$ cắt $B'C'$ và BC tương ứng ở X' và X . Khi đó ta có nhiều tam giác đồng dạng và suy ra nhiều tỉ số đồng dạng.

$$\begin{aligned} \triangle PB'X' &\sim \triangle PBX; \quad \triangle PX'C' \sim \triangle PXC \\ \Rightarrow \frac{B'X'}{BX} &= \frac{PX'}{PX} = \frac{X'C'}{XC} \Rightarrow \frac{B'X'}{BX} = \frac{X'C'}{XC}; \quad \frac{B'X'}{X'C'} = \frac{BX}{XC}. \\ \triangle B'C'Y' &\sim \triangle BCY; \quad \triangle B'Y'A' \sim \triangle BYA \\ \Rightarrow \frac{C'Y'}{CY} &= \frac{B'Y'}{BY} = \frac{Y'A'}{YA} \Rightarrow \frac{C'Y'}{CY} = \frac{Y'A'}{YA}; \quad \frac{C'Y'}{Y'A'} = \frac{CY}{YA}. \\ \triangle C'A'Z' &\sim \triangle CAZ; \quad \triangle C'Z'B' \sim \triangle CZB \\ \Rightarrow \frac{A'Z'}{AZ} &= \frac{C'Z'}{CZ} = \frac{Z'B'}{ZB} \Rightarrow \frac{A'Z'}{AZ} = \frac{Z'B'}{ZB}; \quad \frac{A'Z'}{Z'B'} = \frac{AZ}{ZB}. \end{aligned}$$

Từ giả thiết $BB', CC', A'P$ đồng quy tại P , theo định lý Ceva ta có

$$\frac{B'X'}{X'C'} \cdot \frac{C'Y'}{YA'} \cdot \frac{A'Z'}{Z'B'} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Lại theo định lý Ceva đường AX cũng đi qua điểm P . Điểm A', P và X thẳng hàng theo cách dựng và chúng ta thấy rằng A, P và X thẳng hàng. Do đó A', A và P thẳng hàng và $A'A$ đi qua điểm P .

Nghiệm 2 (Không sử dụng định lý Ceva). Mở rộng BB' và CC' cắt nhau tại điểm P . Vẽ PA' và PA . Trong hình vẽ này ta giả sử A, A', P không thẳng hàng và ta phải chứng minh chúng thẳng hàng.

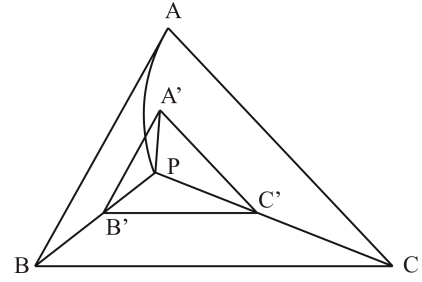
Chúng ta có một vài tam giác đồng dạng.

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC; \quad \Delta PB'C' \sim \Delta PBC$$

$$\Rightarrow \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{PC'}{PC} \Rightarrow \frac{A'C'}{AC} = \frac{PC'}{PC}.$$

Ta có hai tỉ lệ thức ($A'C' : AC$ và $P'C' : PC$) và góc giữa chúng bằng nhau ($\widehat{PC'A'} = \widehat{PCA}$).

Do đó $\Delta PC'A' \sim \Delta PCA$. Tương tự phương pháp đồng dư. Do đó $\widehat{C'PA'} = \widehat{CPA}$, CP chung $C'P$ và PA' cùng trùng PA . Vậy P, A', A thẳng hàng (đpcm).



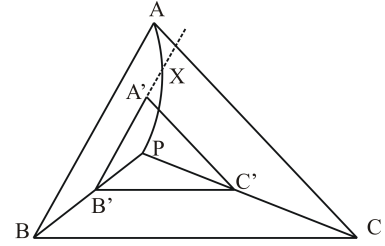
Hình 3.5

Nghiệm 3. Mở rộng BB' và CC' cắt nhau ở điểm P , kéo dài PA , gọi giao của PA với $A'B'$ là X ta phải chứng minh X trùng A' .

Ta có một vài tam giác đồng dạng
 $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC; \Delta PB'C' \sim \Delta PBC;$
 $\Delta PXB' \sim \Delta ABC;$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{PB'}{PB} = \frac{XB'}{AB} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{XB'}{AB}.$$

Do đó $A'B' = XB'$ và điểm A' trùng X vì cả hai cùng nằm trên một đường thẳng và khoảng cách là như nhau.



Hình 3.6

3.3. Mở rộng định lý Ceva trong không gian

3.3.1. Định lý Ceva trong không gian

Định lý 3.3. Trong không gian cho tứ diện $ABCD$. Gọi X là điểm trên $\overline{AB}$, Y là điểm trên $\overline{BC}$, Z là điểm trên $\overline{CD}$ và W là điểm trên $\overline{DA}$. Bốn mặt phẳng (AZB) , (BWC) , (CXD) và (DYA) cắt nhau tại một điểm khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZD}} \cdot \frac{\overline{DW}}{\overline{WA}} = 1. \quad (3.8)$$

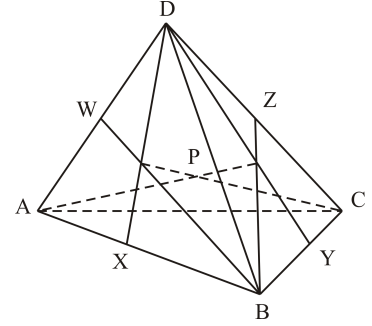
Chứng minh.

Gọi $A' = BZ \cap DY$, $C' = BW \cap DX$, khi đó $(AZB) \cap (AYD) = AA'$, $(CXD) \cap (DYA) = CC'$. Dựng mặt phẳng ch\o chứa cả AA' và CC' . Gọi $T = AC' \cap CA'$. Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ADB và tam giác CDB ta nhận được kết quả sau:

$$\frac{\overline{AW}}{\overline{WD}} \cdot \frac{\overline{DT}}{\overline{TB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XA}} = 1; \quad \frac{\overline{BT}}{\overline{TD}} \cdot \frac{\overline{DZ}}{\overline{ZC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YB}} = 1.$$

Nhân hai vế hai đẳng thức trên ta có

$$\frac{\overline{AW}}{\overline{WD}} \cdot \frac{\overline{DT}}{\overline{TB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XA}} \cdot \frac{\overline{BT}}{\overline{TD}} \cdot \frac{\overline{DZ}}{\overline{ZC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YB}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZD}} \cdot \frac{\overline{DW}}{\overline{WA}} = 1.$$

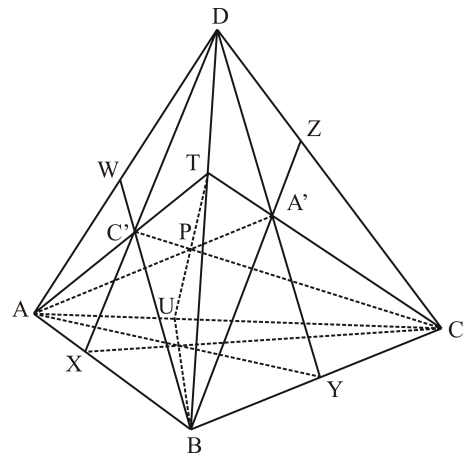


Hình 3.7

3.3.2. Hệ quả của định lý Ceva trong không gian

Hệ quả 3.1. Trên mỗi mặt của tứ diện ta xác định giao điểm của ba đường thẳng theo định lý Ceva (với điều kiện những mặt phẳng có cạnh chung thì có điểm trên cạnh trùng nhau). Khi đó các đoạn nối từ một đỉnh của tứ diện đến các điểm Ceva của các mặt đối diện sẽ đồng quy tại một điểm.

Hệ quả này tương tự như kết quả của định lý Ceva mở rộng trong không gian đã chứng minh ở trên. (3.8) vẫn đúng trong trường hợp này. Theo định lý Ceva trong không gian thì $(AZB) \cap (BWC) \cap (CXD) \cap (DYA) = P$. Ta phải chứng minh được giao điểm của tất cả các mặt phẳng và giao của $(DUB) \cap (ATC)$ đều đi qua P (xem hình vẽ).



Hình 3.8

Theo định lý Melenaus mở rộng trong không gian áp dụng cho tứ diện $ABCT$ được cắt bởi mặt phẳng (XDY) ta có:

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CA'}{A'T} \cdot \frac{TC'}{C'A} = 1. \quad (3.9)$$

Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CU}{UA} = 1. \quad (3.10)$$

Chia (3.9) cho (3.10) và kết quả chứng minh đồng thời của $\overline{TU}$, $\overline{CC'}$ và $\overline{AA'}$ cắt nhau tại P . Điều này có nghĩa là 6 mặt phẳng cắt nhau tại P . Vì vậy, các đường giao nhau của những mặt phẳng cắt nhau tại P , có nghĩa là các phân đoạn cũng cắt nhau tại P .

3.4. Các điểm đặc biệt trong tam giác

3.4.1. Các điểm đặc biệt quen biết

1) **Tâm vòng tròn ngoại tiếp.** Trong tam giác ABC , các đường trung trực các cạnh của tam giác đồng quy tại điểm O là tâm của vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

2) **Tâm vòng tròn nội tiếp.** Trong tam giác ABC , các đường phân giác các góc của tam giác đồng quy tại điểm I là tâm của vòng tròn nội tiếp tam giác ABC .

3) **Trọng tâm.** Trong tam giác ABC , các đường trung tuyến ứng với các cạnh của tam giác đồng quy tại điểm G được gọi là trọng tâm của tam giác ABC .

4) **Trực tâm.** Trong tam giác ABC , các đường cao ứng với các đỉnh của tam giác đồng quy tại điểm H được gọi là trực tâm của tam giác ABC .

3.4.2. Một số điểm đặc biệt khác

1) **Điểm Gergonne.** Trong tam giác ABC ba đoạn thẳng nối các đỉnh của tam giác với tiếp điểm của cạnh đối diện với đường tròn nội tiếp đồng quy tại điểm G_n được gọi là điểm Gergonne.

2) **Điểm Nagel.** Trong tam giác ABC ba đoạn thẳng nối các đỉnh của tam giác với tiếp điểm của cạnh đối diện với đường tròn bàng tiếp đồng quy tại điểm N được gọi là điểm Nagel.

3) Điểm Toricelli. Điểm M trong tam giác ABC có tính chất $MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất được gọi là điểm Toricelli.

4) Điểm Miquel. Cho 4 đường thẳng cắt nhau tại 6 điểm tạo thành 4 tam giác. Các đường tròn ngoại tiếp 4 tam giác này có một điểm chung gọi là điểm Miquel.

5) Điểm Napoleon. Gọi A', B', C' là tâm của ba tam giác đều dựng ra phía ngoài của tam giác ABC bất kỳ, sao cho A', B', C' tương ứng đối diện với các điểm A, B, C . Khi đó ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm, được gọi là điểm Napoleon thứ nhất. Tương tự nếu các tam giác đều được dựng về phía trong của tam giác đã cho, thì ta có điểm Napoleon thứ hai.

6) Điểm Fermat. Cho tam giác ABC . Dựng ra phía ngoài (vào trong) các tam giác đều BCM, ACN, ABP . Khi đó tâm phối cảnh của tam giác ABC và tam giác MNP được gọi là điểm Fermat thứ nhất (thứ hai) hay người ta còn gọi là điểm Fermat dương (âm).

7) Điểm Brocard. Trong một tam giác ABC cho trước có hai điểm Brocard M, N được xác định sao cho: $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}$ và $\widehat{NAC} = \widehat{NCB} = \widehat{NBA}$

8) Điểm Schiffler. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Khi đó 4 đường thẳng Euler của tam giác IAB, IAC, IAB và ABC đồng quy tại điểm Schiffler của tam giác.

9) Điểm Feuerbach. Trong một tam giác, đường tròn Euler tiếp xúc với đường tròn nội tiếp của nó, và tiếp điểm đó được gọi là điểm Feuerbach của tam giác trên.

10) Điểm Kosnita. Cho tam giác ABC , O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC, AOC, AOB . Khi đó ba đường thẳng AO_1, BO_2 và CO_3 đồng quy tại điểm Kosnita của tam giác.

11) Điểm Parry reflection. Cho tam giác ABC . Kẻ qua A, B, C các đường thẳng a, b, c song song với nhau và song song với đường thẳng Euler của tam giác. Gọi a', b', c' lần lượt là các đường đối xứng với a, b, c qua BC, CA, AB . Khi đó các đường này đồng quy tại điểm Parry reflection của tam giác ABC .

3.5. Bài toán

Bài toán 3.1. Chứng minh rằng trong một tam giác

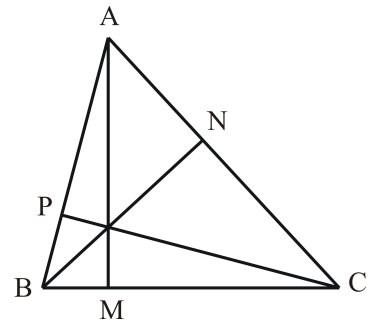
- (a) Ba đường trung tuyến đồng quy;
- (b) Ba đường phân giác đồng quy;
- (c) Ba đường cao đồng quy;
- (d) Ba đường trung trực đồng quy.

Chứng minh.

- (a) Ba đường trung tuyến AM, BN, CP đồng quy.

Thật vậy ta có $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Theo định lý Ceva, AM, BN, CP đồng quy tại G (G là trọng tâm tam giác).

(b) Ba đường phân giác AD, BE, CF đồng quy. Áp dụng tính chất đường phân giác ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$; $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}$ và $\frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}$.
Do đó $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$,
theo định lý Ceva ta có AD, BE, CF đồng quy tại I (I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC).



Hình 3.9

- (c) Ba đường cao AH, BI, CK đồng quy.

Trường hợp tam giác ABC nhọn.

Ta có $\triangle AKC \sim \triangle ABI \Rightarrow \frac{AK}{AI} = \frac{AC}{AB}$, $\triangle BCI \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{CI}{CH} = \frac{BC}{AC}$.

Do đó $\frac{HB}{HC} \cdot \frac{IC}{IA} \cdot \frac{KA}{KC} = 1$, theo định lý Ceva thì ba đường thẳng AH, BI và CK đồng quy tại một điểm được gọi là trực tâm của tam giác.

Trường hợp tam giác ABC tù tại A .

Gọi O là giao điểm của BI và CK . Khi đó A là trực tâm của tam giác OBC nên $OA \perp BC$, suy ra $O \in AH$.

(d) Ba đường trung trực d_a, d_b, d_c đồng quy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Khi đó d_a, d_b, d_c là ba đường cao của tam

giác MNP nên đồng quy (đpcm).

Bài toán 3.2. Cho tam giác ABC và đường tròn tâm I nội tiếp trong tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, AC và AB lần lượt tại D, E, F . Khi đó các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại một điểm.

Lời giải.

Ta có $BD = BF, CD = CE, AE = AF$. Suy ra $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$, theo định lý Ceva thì các đường thẳng AD, BE và CF đồng quy tại một điểm J (J được gọi là **điểm Gergonne** của tam giác ABC).

Bài toán 3.3. Trong tam giác ABC , M là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường phân giác góc trong của góc $\widehat{BCA}$. N, L lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ các đỉnh A, C xuống đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$. Gọi F là giao điểm của các đường thẳng MN và AC , E là giao điểm của các đường thẳng BF và CL , D là giao điểm của các đường thẳng BL và AC . Chứng minh rằng DE và MN song song với nhau.

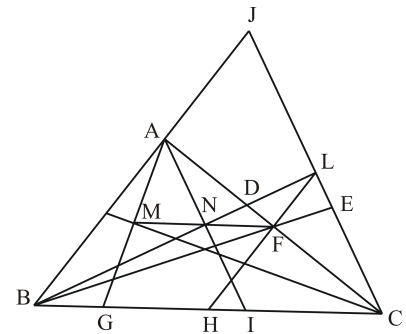
Lời giải.

Kéo dài AM cắt BC tại G , kéo dài AN cắt BC tại I . Khi đó $AM = MG, AN = NI$, suy ra MN và BC song song với nhau. Vì $AM = MG$ nên ta có $AF = FC$. Kéo dài CL cắt AB tại J . Khi đó $JL = LC$, suy ra LF và AB song song với nhau.

Gọi H là giao điểm của LF và BC . Ta có $BH = HC$. Trong tam giác BLC , các đoạn thẳng BE, LH, CD cắt nhau tại F . Sử dụng định lý Ceva ta nhận được

$$\frac{BH}{HC} \cdot \frac{CE}{EL} \cdot \frac{LD}{DB} = 1.$$

Vì $BH = HC$ nên $\frac{CE}{EL} = \frac{DB}{LD}$. Từ đó suy ra DE và BC song song với nhau. Do đó, DE và MN song song với nhau.



Hình 3.10

Bài toán 3.4. Cho $\triangle ABC$ lấy E, F, M thứ tự trên cạnh AC, AB, BC sao cho $EF \parallel BC, MB = MC$. Chứng minh rằng CF, BE, AM đồng quy.

Lời giải.

Cách 1. (Chứng minh đồng quy) Gọi K là giao điểm của AM và EF . Theo định lý Talét $\frac{AF}{BF} = \frac{AK}{KM}; \frac{CE}{AE} = \frac{KM}{AK};$ và $\frac{BM}{CM} = 1$.

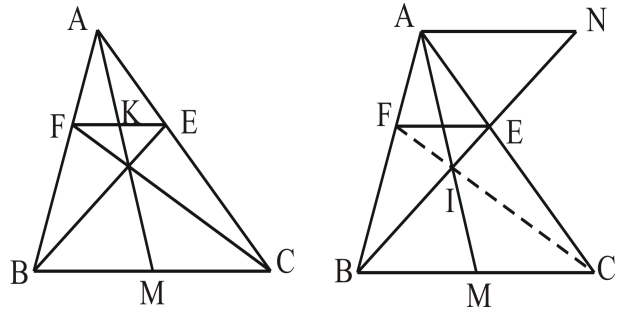
Suy ra $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$. Áp dụng định lý Ceva cho $\triangle ABC$ ta có CF, BE, AM đồng quy.

Cách 2: (Chứng minh thẳng hàng.) Từ A kẻ đường thẳng song song BC cắt BE tại $N, AM \cap BE = I$.

Ta có

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AN}{BC}; \quad \frac{BC}{MC} = 2;$$

$$\frac{MI}{AI} = \frac{BM}{AN}.$$



Hình 3.11

$$\text{Suy ra } \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BC}{MC} \cdot \frac{MI}{AI} = \frac{AN}{BC} \cdot 2 \cdot \frac{BM}{AN} = 1.$$

Áp dụng định lý Menelaus cho ABM thì F, I, C thẳng hàng. Từ đó suy ra CF, BE, AM đồng quy.

Bài toán 3.5. Cho đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Chứng minh AD, BE, CF đồng quy.

Lời giải.

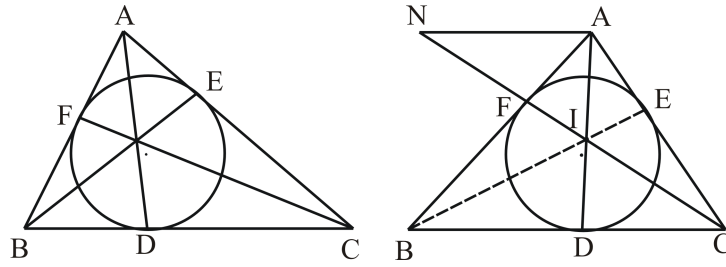
Cách 1: Chứng minh đồng quy.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau $AF = AE; BF = BD; CE = CD$, suy ra $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = \frac{AE}{BD} \cdot \frac{BD}{CE} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$.

Áp dụng định lý Ceva cho $\triangle ABC$ suy ra AD, BE, CF đồng quy.

Cách 2: Chứng minh thẳng hàng.

Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt CF tại $N. AD \cap CF = I$. Ta có $\frac{AE}{CE} \cdot \frac{CB}{DB} \cdot \frac{DI}{AI} = \frac{AF}{CD} \cdot \frac{CB}{BF} \cdot \frac{CD}{AN} = \frac{AF}{BF} \cdot \frac{CB}{AN} = \frac{AN}{CB} \cdot \frac{CB}{AN} = 1$.



Hình 3.12

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ACD$ thì AD, BE, CF đồng quy.

Bài toán 3.6. Cho tam giác ABC đường cao AH . Lấy D, E thứ tự trên AB, AC sao cho AH là phân giác góc $\widehat{DHE}$. Chứng minh rằng AH, BE, CD đồng quy.

Lời giải.

Cách 1: Chứng minh đồng quy. Từ A kẻ đường thẳng song song BC cắt HE, HD tại M và N .

Vì HA là phân giác của góc $\widehat{A}$, HA là đường cao nên $AM = AN$.

Ta lại có

$$\frac{AD}{BD} = \frac{MA}{BH}; \frac{CE}{AE} = \frac{CH}{AN} \Rightarrow \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BH}{CH} \cdot \frac{CE}{AE} = \frac{MA}{BH} \cdot \frac{BH}{CH} \cdot \frac{CH}{AN} = 1.$$

Hình 3.13

Áp dụng định lý Ceva cho $\triangle ABC$ suy ra AH, BE, CD đồng quy.

Cách 2: Chứng minh thẳng hàng.

Từ A kẻ đường thẳng song song BC cắt HD, HE, BE lần lượt tại M, N, K . Gọi $AH \cap BE = I$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{AD}{BD} &= \frac{MA}{BH} = \frac{AN}{BH} \quad \text{và} \quad \frac{HI}{AI} = \frac{BH}{AK} \\ \Rightarrow \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BH}{CH} \cdot \frac{HI}{AI} &= \frac{AN}{BH} \cdot \frac{BH}{CH} \cdot \frac{BH}{AK} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CE}{AE} = 1. \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABH$ thì D, I, C thẳng hàng. Vậy AH, BE, CD đồng quy.

Bài toán 3.7. Cho tứ giác lồi $ABCD$, các đường DA cắt CB tại K , AB cắt DC tại L , AC cắt KL tại G và DB cắt KL tại F . Chứng minh rằng $\frac{KF}{FL} = \frac{KG}{GL}$.

Lời giải.

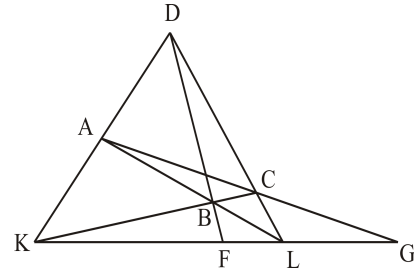
Áp dụng định lý Ceva cho tam giác DKL và điểm B , ta có

$$\frac{DA}{AK} \cdot \frac{KF}{FL} \cdot \frac{LC}{CD} = 1. \quad (3.11)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác DKL và đường thẳng ACG , ta có

$$\frac{DA}{AK} \cdot \frac{KG}{GL} \cdot \frac{LC}{CD} = 1. \quad (3.12)$$

Từ (3.11) và (3.12) ta suy ra $\frac{KF}{FL} = \frac{KG}{GL}$.

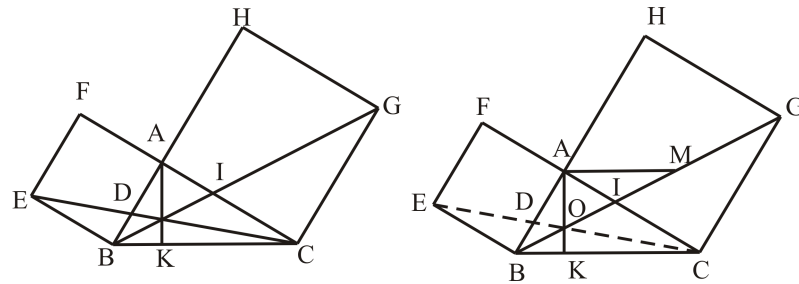


Hình 3.14

Bài toán 3.8. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AK . Dựng bên ngoài tam giác những hình vuông $ABEF$ và $ACGH$. Chứng minh rằng AK , BG , CE đồng quy.

Lời giải.

Cách 1: Chứng minh đồng quy.



Hình 3.15

Gọi $D = AB \cap CE$, $I = AC \cap BG$. Đặt $AB = c$, $AC = b$.

$$\text{Có } c^2 = BK \cdot BC; b^2 = CK \cdot BC \Rightarrow \frac{BK}{CK} = \frac{c^2}{b^2} \text{ và } \frac{AD}{BD} = \frac{b}{c}; \frac{CI}{AI} = \frac{b}{c}$$

(do $\triangle AIB \sim \triangle CIG$), suy ra $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BK}{CK} \cdot \frac{CI}{AI} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{b}{c} = 1$.

Áp dụng định lý Ceva cho ΔABC thì AK, BG, CE đồng quy.

Cách 2: Chứng minh thẳng hàng.

Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BG tại M. $AK \cap BG = O$.

Ta có $\frac{AD}{BD} = \frac{b}{c}$; $\frac{KO}{AO} = \frac{BK}{AM}$.

Suy ra

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{CK} \cdot \frac{KO}{AO} = \frac{b}{c} \cdot \frac{BC}{CK} \cdot \frac{BK}{AM} = \frac{b}{c} \cdot \frac{BC}{AM} \cdot \frac{BK}{CK} = \frac{b}{c} \cdot \frac{CI}{CK} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c^2}{b^2} = 1.$$

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔABK thì D, O, C thẳng hàng. Vậy AK, BG, CE đồng quy.

Bài toán 3.9. (Olympic Toán học mùa xuân Bulgaria, P11.2, 1997) Cho tứ giác lồi ABCD thỏa mãn $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. Gọi H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Chứng minh rằng H, O, D thẳng hàng.

Lời giải.

Đặt $\widehat{CAB} = \alpha, \widehat{ABC} = \beta, \widehat{BCA} = \gamma$.
Chú ý rằng $\alpha < \beta, \gamma < \beta$. Ta cần xét các trường hợp $\beta < 90^\circ, \beta = 90^\circ$ và $\beta > 90^\circ$.

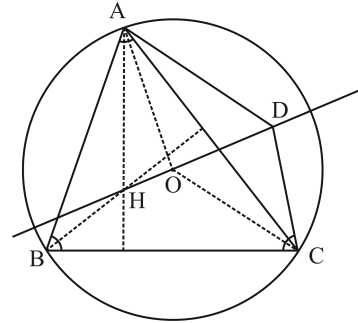
* Giả sử $\beta < 90^\circ$. Lúc đó O, H là các điểm nằm trong ΔABC và ta có $\widehat{ACO} = \widehat{CAO} = \widehat{HCB} = \widehat{HAB} = 90^\circ - \beta$. Vì thế O là điểm nằm bên trong ΔHAC , từ đó $\widehat{HAC} = \beta - \gamma = \widehat{ACD}$, $\widehat{HCO} = \beta - \alpha = \widehat{CAD}$, $\widehat{HAD} = \widehat{HCD} = 2\beta - 90^\circ$.

Áp dụng định lý hàm số sin cho $\Delta AHD, \Delta CHD, \Delta ACD$ ta được

$$\frac{\sin \widehat{AHD}}{\sin \widehat{HAD}} = \frac{AD}{HD}, \frac{\sin \widehat{HCD}}{\sin \widehat{CHD}} = \frac{HD}{CD}, \frac{\sin \widehat{CAD}}{\sin \widehat{ACD}} = \frac{CD}{AD}.$$

Nhân 2 vế tương ứng của ba đẳng thức trên ta được

$$\sin \widehat{AHD} \cdot \sin \widehat{HCO} \cdot \sin \widehat{CAO} = \sin \widehat{CHD} \cdot \sin \widehat{HAO} \cdot \sin \widehat{ACO}.$$



Hình 3.16

Từ định lý Ceva, suy ra AO, CO, HD đồng quy tại một điểm, do đó H, D, O thẳng hàng.

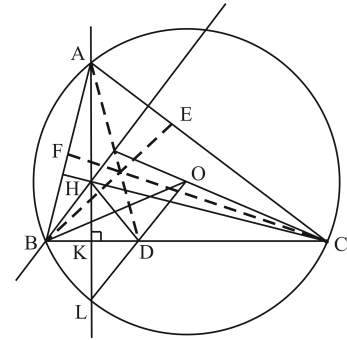
* Trong trường hợp $\beta = 90^\circ$, ta chứng minh được H, B trùng nhau, O là trung điểm AC và tứ giác $AHCD$ là hình chữ nhật. Do vậy H, O, D thẳng hàng.

* Sau cùng, giả sử $\beta > 90^\circ$. Trong trường hợp này B và O lần lượt nằm trong $\triangle AHC$ và $\triangle ADC$. Tương tự như trường hợp $\beta < 90^\circ$ ta cũng có các điểm H, D, O thẳng hàng.

Bài toán 3.10. (Bài đề nghị cho IMO của nước Anh, 2000) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm của tam giác nhọn ABC . Chứng tỏ rằng tồn tại các điểm D, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $OD + DH = OE + EH = OF + FH$ và các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Lời giải.

Kéo dài AH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại L và BC tại K . $OL \cap BC = D$. Nối HD , ta biết rằng $HK = KL$ nên cũng có $HD = LD$. Như thế $OD + DH = OD + DL = OL = R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tương tự ta có thể chọn các điểm E và F lần lượt trên CA và AB sao cho $OE + EH = R = OF + FH$.



Hình 3.17

Ta sẽ chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Kẻ OB, OC và BL . Bây giờ $\widehat{OBC} = 90^\circ - \widehat{A}$ và $\widehat{CBL} = \widehat{CAL} = 90^\circ - \widehat{C}$. Vì thế $\widehat{OBL} = (90^\circ - \widehat{A}) + (90^\circ - \widehat{C}) = \widehat{B}$. Do $OB = OL$, ta cũng có $\widehat{OLB} = \widehat{B}$.

Do đó $\widehat{BOL} = 180^\circ - 2\widehat{B}$. Từ đó, $\widehat{BOD} = 180^\circ - 2\widehat{B}$.

Tương tự, ta có $\widehat{COD} = 180^\circ - 2\widehat{C}$. Theo định lý hàm sin trong $\triangle BOD$ và $\triangle AOB$ có

$$\frac{BD}{\sin \widehat{BOD}} = \frac{OD}{\sin \widehat{ODB}} \quad \text{và} \quad \frac{CD}{\sin \widehat{COD}} = \frac{OD}{\sin \widehat{OCD}}.$$

Từ đó suy ra $\frac{BD}{CD} = \frac{\sin(180^\circ - 2B)}{\sin(180^\circ - 2C)} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$.

Tương tự, $\frac{CE}{EA} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$; $\frac{AF}{FB} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B}$.

Vậy ta có $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$.

Theo định lí Ceva các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy (đpcm).

Bài toán 3.11. (Vô địch Hàn Quốc 1992) Trong tam giác ABC . Gọi M là giao điểm của phân giác phân giác góc A với cạnh BC . D là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC . Nếu E và F tương ứng là các giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD với hai cạnh CA và AB , hãy chứng minh rằng các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Lời giải.

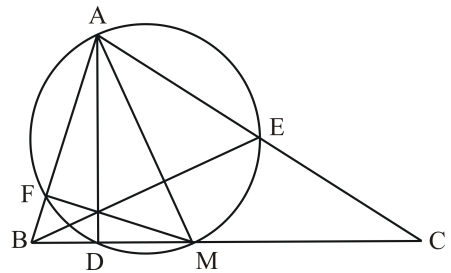
Vì $\widehat{ADM} = \frac{1}{2}\pi$ và các điểm A, D, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn nên $\widehat{BFM} = \widehat{CEM} = \frac{1}{2}\pi$.

Do vậy, $\triangle BFM \sim \triangle BDA$,
 $\triangle CEM \sim \triangle CDA \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MC}$

và $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{MC}$.

Nhưng $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MC}$ theo tính chất phân giác, do đó ta có $\frac{BD}{BF} = \frac{CD}{CE}$. Vì $\widehat{FAM} = \widehat{MAE}$ nên $AE = AF$.

Suy ra $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{CA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BD}{BF} \cdot \frac{CD}{CE} = 1$ và do đó AD, BE, CF đồng quy theo định lý Ceva.



Hình 3.18

Chương 4

Các điểm thẳng hàng

Trong chương này trình bày một số định lý về các điểm thẳng hàng, cũng như chương trước tác giả không đưa vào độ dài đại số ở một số định lý, bài toán và phần chứng minh.

4.1. Định lý Menelaus

Định lý 4.1. Cho tam giác ABC , trên các đường thẳng chứa các cạnh BC , CA , AB , ta lấy các điểm P, Q, R tương ứng sao cho mỗi điểm không trùng với đỉnh tam giác. Khi đó, ba điểm P, Q, R thẳng hàng khi và chỉ khi

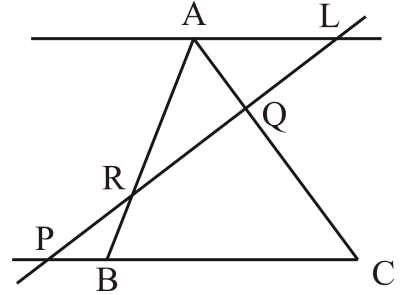
$$\frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = 1. \quad (4.1)$$

Chứng minh.

Phần thuận: Giả sử ba điểm P, Q, R thẳng hàng. Qua A , kẻ đường thẳng song song với BC , cắt đường thẳng (d) tại L . Sử dụng hệ quả của định lý Thales, ta có

$$\frac{\overline{LA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \Leftrightarrow \overline{LA} = \frac{\overline{CP} \cdot \overline{QA}}{\overline{QC}}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{LA}} \Leftrightarrow \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{LA}}{\overline{PB}} = 1. \quad (4.3)$$



Hình 4.1

Thay AL ở (4.2) vào (4.3) ta được điều phải chứng minh.

Phần đảo: Giả sử (4.1) xảy ra. Gọi Q' là giao điểm của PR và cạnh AC . Khi đó theo phần thuận ta có

$$\frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{Q'A}}{\overline{Q'C}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = 1. \quad (4.4)$$

Từ (4.1) và (4.4) ta suy ra $\frac{\overline{Q'A}}{\overline{Q'C}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$. Vậy $Q \equiv Q'$ (đpcm).

Ghi chú: Định lý Menelaus (phần đảo) thường được sử dụng để chứng minh tính thẳng hàng của các giao điểm của một số đường thẳng.

4.2. Mở rộng định lý Menelaus trong mặt phẳng

4.2.1. Mở rộng định lý Menelaus trong tam giác

Định lý 4.2. Cho tam giác ABC . Một đường thẳng (d) bất kỳ cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R . Khi đó:

$$\frac{\overline{BR}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{BP}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{BR}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = -1. \quad (4.5)$$

Đảo lại, giả sử các điểm P, Q, R tương ứng nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho (4.5) được thoả mãn. Khi đó P, Q, R thẳng hàng.

Chứng minh.

Phần thuận: Tương tự như định lý Menelaus đã biết.

Phần đảo: Giả sử (4.5) được thoả mãn. Gọi C_1 là giao điểm của đường thẳng QP và AB . Ta cần chứng minh C_1 và R trùng nhau. Theo phần thuận ta có $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{BP}} = 1 = \frac{\overline{BR}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, suy ra $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AC_1}} \cdot \frac{\overline{BR}}{\overline{AR}} = m$.

Để chứng minh $C_1 \equiv R$, ta để ý rằng phương trình $\frac{\overline{BX}}{\overline{AX}} = m (m \neq 1)$ có không quá một nghiệm khi $A \neq B$. Thật vậy, chọn gốc toạ độ là A , trục toạ độ AB với chiều dương là chiều từ A đến B . Cho toạ độ của X là x , toạ độ của điểm A là a , lúc đó phương trình trên trở thành $\frac{x}{x-a} = m \Leftrightarrow x = \frac{ma}{m-1}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

4.2.2. Mở rộng định lý Menelaus theo diện tích

Định lý 4.3. Cho tam giác ABC và 3 điểm M, N, P lần lượt thuộc BC, CA, AB . Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{[MNP]}{[ABC]} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{AP} - \overline{CM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BP}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}. \quad (4.6)$$

Chứng minh. Ta có $[ABC] = [MAB] + [MAC]$.

$$\Rightarrow [ABC] = [PMA] + [PBM] + [NMC] + [NAM].$$

$$\Rightarrow [ABC] = [MNP] + [BMP] + [CNM] + [APN].$$

Mặt khác $\frac{[BMP]}{[ABC]} =$

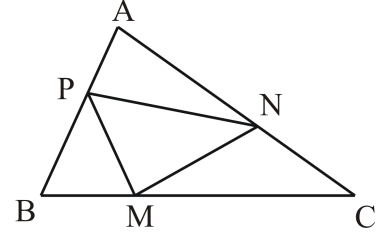
$$\frac{\overline{BM} \cdot \overline{BP} \cdot \sin(BC, CA)}{\overline{BC} \cdot \overline{BA} \cdot \sin(BC, CA)} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BP}}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}.$$

Tương tự ta có $\frac{[CNM]}{[ABC]} = \frac{\overline{CN} \cdot \overline{CM}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}},$

$$\frac{[APN]}{[ABC]} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AN}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}.$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{[MNP]}{[ABC]} &= 1 - \frac{[BMP]}{[ABC]} - \frac{[CNM]}{[ABC]} - \frac{[APN]}{[ABC]} \\ \Rightarrow \frac{[MNP]}{[ABC]} &= 1 - \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BP}}{\overline{BC} \cdot \overline{BA}} - \frac{\overline{CN} \cdot \overline{CM}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} - \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AN}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} \\ \Rightarrow \frac{[MNP]}{[ABC]} &= \frac{\overline{BM} \cdot \overline{CN} \cdot \overline{AP} - \overline{CM} \cdot \overline{AN} \cdot \overline{BP}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}. \end{aligned}$$



Hình 4.2

4.2.3. Mở rộng Định lý Menelaus trong tứ giác

Định lý 4.4. Cho tứ giác ABCD và một đường thẳng d cắt AB, BC, CD, DA lần lượt ở M, N, P, Q. Khi đó ta có

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1. \quad (4.7)$$

Chứng minh.

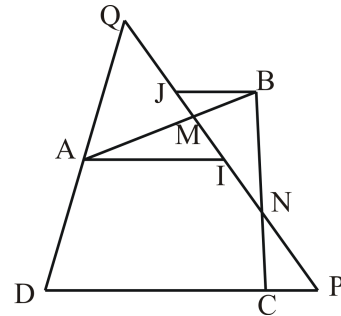
Trên đường thẳng d lấy hai điểm I, J sao cho $AI \parallel BJ \parallel CD$.

Theo Thales ta có

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{JB}}, \quad \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{JB}}{\overline{PC}}, \quad \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{IA}}.$$

Suy ra

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{JB}} \cdot \frac{\overline{JB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{IA}} = 1.$$



Hình 4.3

4.3. Mở rộng định lý Menelaus trong không gian

4.3.1. Mặt phẳng phân giác góc nhị diện

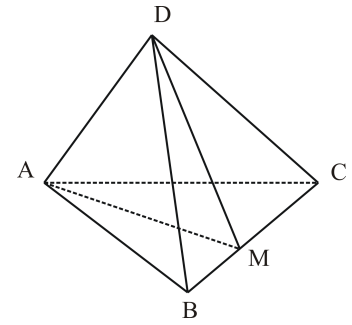
Định lý 4.5. Cho $ABCD$ là một tứ diện. Gọi M là một điểm nằm trên BC sao cho mặt phẳng (AMD) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện (ADC, ADB) . Khi đó $\frac{BM}{MC} = \frac{[ABD]}{[ACD]}$.

Chứng minh.

Ta có $\frac{V_{ABMD}}{V_{ACMD}} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$, (vì cả hai khối tứ diện đều có chiều cao bằng khoảng cách từ A đến $mp(BCD)$).

Ta lại có $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AM}{MD}$. (Tỉ số diện tích rút gọn được do hai tam giác có cùng chiều cao là khoảng cách từ D đến BC).

Bây giờ, tỉ số ban đầu của khối có thể viết lại theo cách khác. Chiều cao hạ từ M đến (ABD) bằng chiều cao hạ từ M đến (ACD) . Đây là tính chất của phân giác góc nhị diện. Điều này có nghĩa là trong tỉ số của khối, chiều cao triệt tiêu cho tử số và mẫu số, còn lại tỉ số diện tích tam giác ABD và diện tích tam giác ACD . Tóm lại, $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{V_{ABMD}}{V_{ACMD}} = \frac{AM}{MD}$.



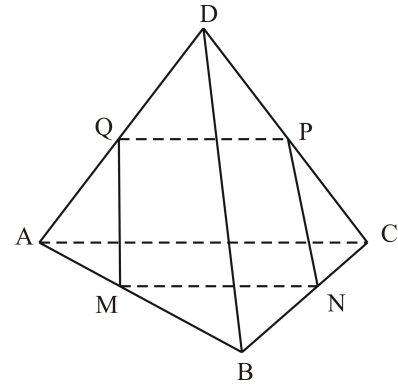
Hình 4.4

4.3.2. Định lý Menelaus trong không gian

Đầu tiên cố gắng xây dựng tương tự định lý này bằng cách nghiên cứu tỉ số diện tích khi mặt phẳng không cắt khối tứ diện. Trong khi làm nghiên cứu hình học không gian cơ bản, một vài điều thú vị về mở rộng của định lý của Menelaus đã được tìm thấy.

Định lý 4.6. Cho tứ diện $ABCD$, M là điểm trên $\overline{AB}$, N là điểm trên $\overline{BC}$, P là điểm trên $\overline{CD}$ và Q là điểm trên $\overline{DA}$. Các điểm M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$.

Kết quả. Cũng như định lý của Ceva trên mặt phẳng có tính đối ngẫu với định lý của Menelaus, người ta hy vọng rằng sẽ có tính đối ngẫu tương tự trong không gian. Đây là một trong những nguyên lý dẫn đến phát biểu cho định lý của Ceva trong không gian.



Hình 4.5

4.4. Định lý Desargues và Định lý Pappus

4.4.1. Định lý Desargues

Định lý 4.7. Cho hai tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$. Gọi M là giao điểm của AB và A_1B_1 , N là giao điểm của AC và A_1C_1 , P là giao điểm của BC và B_1C_1 . Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Chứng minh.

Chiều nghịch: Cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại O , ta chứng minh M, N, P thẳng hàng. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác OAC với ba điểm N, A_1 và C_1 , ta có

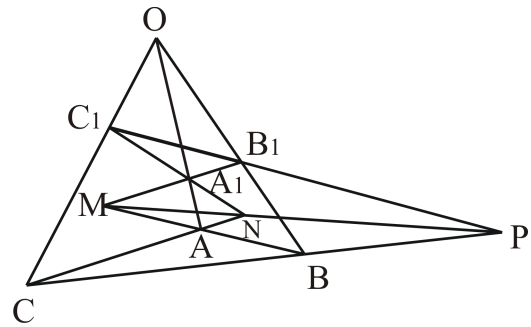
$$\frac{NA}{NC} \cdot \frac{C_1C}{C_1O} \cdot \frac{A_1O}{A_1A} = 1. \quad (4.8)$$

Tương tự ta có

$$\frac{PC}{PB} \cdot \frac{B_1B}{B_1O} \cdot \frac{C_1O}{C_1C} = 1; \quad \frac{MB}{MA} \cdot \frac{A_1A}{A_1O} \cdot \frac{B_1O}{B_1B} = 1. \quad (4.9)$$

Từ (4.8) và (4.9) ta có $\frac{NA}{NC} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{MB}{MA} = 1$, do đó áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC , ta có M, N, P thẳng hàng.

Chiều thuận: Cho M, N, P thẳng hàng, ta chứng minh AA_1, BB_1, CC_1



Hình 4.6

đồng quy. Xét hai tam giác MBB_1 và NCC_1 có MN, BC, B_1C_1 đồng quy tại P .

Ta có O là giao điểm của BB_1 và CC_1 . Hơn nữa A là giao của MB và NC , A_1 là giao của MB_1 và NC_1 . Do đó theo chứng minh trên, ta có O, A và A_1 thẳng hàng, hay AA_1, BB_1 và CC_1 đồng quy (đpcm).

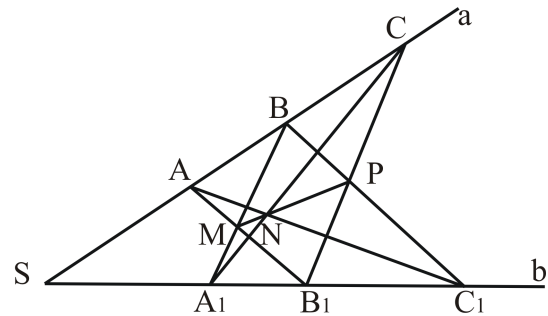
4.4.2. Định lý Pappus

Định lý 4.8. Cho ba điểm A, B, C nằm trên đường thẳng a , và ba điểm A_1, B_1, C_1 nằm trên đường thẳng b . Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB_1, A_1B), (AC_1, A_1C), (BC_1, B_1C)$ khi đó M, N, P thẳng hàng.

Chứng minh.

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác suy biến $AB_1CA_1BC_1$ nội tiếp đường tròn bậc hai (S) là cặp đường thẳng a và b .

Ta có $AB_1 \cap A_1B = M, AC_1 \cap A_1C = N, BC_1 \cap B_1C = P \Rightarrow M, N, P$ thẳng hàng (đpcm).



Hình 4.7

4.5. Tam giác phối cảnh

Định lý nêu trong phần này thuộc về Girard Desargues (1591-1661). Nó có ứng dụng quan trọng đối với lý thuyết vẽ phối cảnh trong nghệ thuật. Một số tác giả sử dụng thuật ngữ "copolar" để mô tả những hình tam giác phối cảnh từ một điểm. Một số tác giả sử dụng thuật ngữ "coaxial" để mô tả các hình tam giác được phối cảnh theo một đường thẳng.

Định nghĩa 4.1. Hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A_1B_1C_1$ được gọi là phối cảnh từ điểm O nếu ba đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm O . Điểm O được gọi là đỉnh phối cảnh.

Định nghĩa 4.2. Hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A_1B_1C_1$ được gọi là phối cảnh theo một đường thẳng nếu ba điểm L, M, N tương ứng là giao điểm của BC và B_1C_1 , AC và A_1C_1 , AB và A_1B_1 thì L, M, N thẳng hàng. Đường thẳng chứa các điểm L, M, N được gọi là đường phối cảnh.

Định lý 4.9. (Desargues) Hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A_1B_1C_1$ là phối cảnh từ một điểm khi và chỉ khi chúng là phối cảnh theo một đường thẳng.

4.6. Bài toán

Bài toán 4.1. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) , gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng NP, MQ và BD đồng quy.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $AQ = AM, BM = BN, CN = CP, DP = DQ$. Gọi O là giao điểm của NP và BD . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD ta

$$\frac{OB}{OD} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{NC}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{NB}{PD}.$$

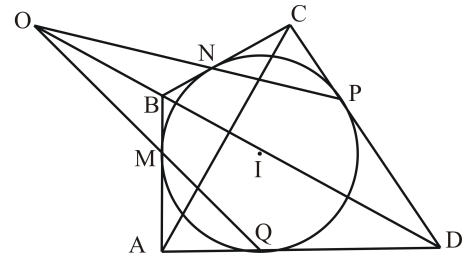
$$\text{Khi đó ta có } \frac{OB}{OD} \cdot \frac{QD}{QA} \cdot \frac{MA}{MB} = \frac{NB}{PD} \cdot \frac{QD}{MB} = 1.$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABD thì O, M, Q thẳng hàng. Vậy NP, BD và MQ đồng quy (đpcm).

Bài toán 4.2. Chứng minh rằng trong một tam giác, chân đường phân giác trong của hai góc và chân đường phân giác ngoài của góc thứ ba là thẳng hàng.

Lời giải. Cho tam giác ABC , gọi BE, CF là hai đường phân giác trong và AD là phân giác ngoài. ($E \in AC, F \in AB, D \in BC$).

Trước hết ta thấy 3 điểm D, E, F thỏa mãn điều kiện hai điểm E, F thuộc hai cạnh AC, AB của tam giác còn điểm D nằm ngoài đoạn BC .



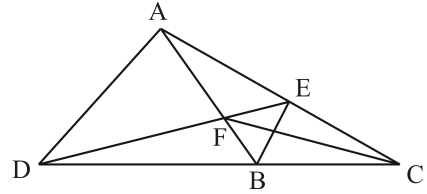
Hình 4.8

Mặt khác theo tính chất của đường phân giác của tam giác, ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}.$$

Suy ra

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1 \quad (\text{đpcm}).$$



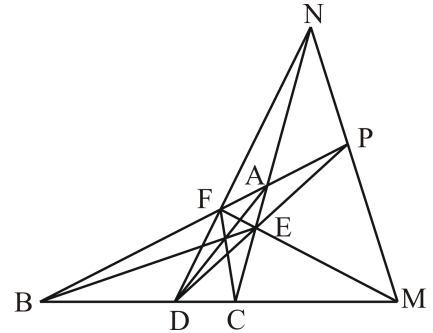
Hình 4.9

Bài toán 4.3. Cho tam giác ABC và AD, BE, CF là bộ ba đường thẳng Ceva. Gọi P là giao điểm của DE và AB , N là giao điểm của DF và AC , M là giao điểm của EF và BC . Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Lời giải.

Xét hai tam giác ABC và tam giác DEF có AD, BE, CF đồng quy. Áp dụng định lý Desargues ta có ngay điều cần chứng minh (đpcm).

Bài toán 4.4. (Macedonia 2001) Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn. Gọi D là giao điểm của tiếp tuyến tại A với đường thẳng BC , E là giao điểm của tiếp tuyến tại B với đường thẳng CA , F là giao điểm của tiếp tuyến tại C với đường thẳng AB . Chứng minh rằng các điểm D, E, F thẳng hàng.



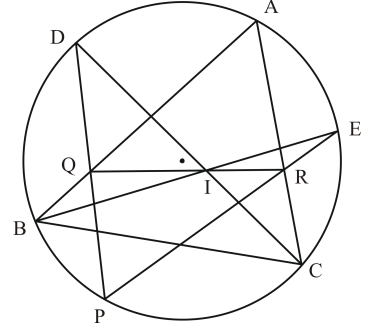
Hình 4.10

Lời giải. Áp dụng định lý Pascal cho các điểm A, A, B, B, C, C cùng nằm trên một đường tròn, ta có ngay kết quả các điểm D, E, F thẳng hàng.

Bài toán 4.5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường một tròn. D lần lượt là các điểm giữa của các cung AB, AC . Gọi P là một điểm thuộc cung BC , Q là giao điểm của DP và AB , R là giao điểm của PE và AC . Chứng minh rằng đường thẳng QR chứa tâm I đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

Lời giải.

Vì D là điểm giữa cung AB nên đường thẳng CD chia đôi góc $\widehat{ACB}$. Tương tự đường thẳng EB chia đôi góc $\widehat{ABC}$. Do đó CD và EB giao nhau tại I . Áp dụng định lý Pascal cho các điểm C, D, P, E, B, A ta nhận được các điểm I, Q, R thẳng hàng.



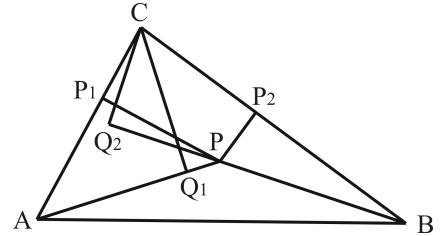
Hình 4.11

Bài toán 4.6. (IMO 1991 unused) Cho tam giác ABC và P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi P_1, P_2 lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống các cạnh AC, BC . Nối AP, BP , từ C kẻ các đường vuông góc xuống AP, BP . Gọi Q_1, Q_2 là chân các đường vuông góc này. Giả sử rằng $Q_2 \neq P_1, Q_1 \neq P_2$. Chứng minh rằng các đường thẳng P_1Q_2, Q_1P_2, AB đồng quy.

Lời giải.

Vì $\widehat{CP_1P} = \widehat{CP_2P} = \widehat{CQ_2P} = \widehat{CQ_1P} = 90^\circ$ nên các điểm C, Q_1, P_1, P, P_2, Q_2 cùng nằm trên một đường tròn đường kính CP . Chú ý rằng $A = CP_1 \cap PQ_1, B = Q_2P \cap P_2C$.

Áp dụng định lý Pascal cho các điểm C, P_1, Q_2, P, Q_1, P_2 ta nhận được $X = P_1Q_2 \cap Q_1P_2$ thuộc đường thẳng AB .



Hình 4.12

Bài toán 4.7. (China 2005). Một đường tròn cắt ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC tại các điểm $D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2$. Các đoạn D_1E_1, D_2E_2 cắt nhau tại L , các đoạn E_1F_1, E_2D_2 cắt nhau tại M , các đoạn F_1D_1, F_2E_2 cắt nhau tại N . Chứng minh rằng các đường thẳng AP, BM, CN đồng quy.

Lời giải. Gọi $P = D_1F_1 \cap D_2E_2, Q = E_1D_1 \cap E_2F_2, R = F_1E_1 \cap F_2D_2$.

Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $E_2, E_1, D_1, F_1, F_2, D_2$, ta nhận được A, L, P thẳng hàng.

Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $F_2, F_1, E_1, D_1, D_2, E_2$, ta nhận được B, M, Q thẳng hàng.

Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $D_2, D_1, F_1, E_1, E_2, F_2$, ta nhận được C, N, R thẳng hàng.

Gọi $X = E_2E_1 \cap D_1F_2 = CA \cap D_1F_2$,

$Y = F_2F_1 \cap E_1D_2 = AB \cap E_1D_2$,

$Z = D_2D_1 \cap F_1E_2 = BC \cap F_1E_2$.

Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $D_1, F_1, E_1, E_2, D_2, F_2$, ta nhận được P, R, X thẳng hàng.

Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $E_1, D_1, F_1, F_2, E_2, D_2$, ta nhận được Q, P, Y thẳng hàng.

Áp dụng định lý Pascal cho các điểm $F_1, E_1, D_1, D_2, F_2, E_2$, ta nhận được R, Q, Z thẳng hàng.

Xét hai tam giác $\triangle ABC, \triangle PQR$, ta có $X = CA \cap RP, Y = AB \cap PQ, Z = BC \cap QR$. Áp dụng định lý Desargues (phần đảo), ta có $AP \equiv AL, BQ \equiv BM, CR \equiv CN$ là các đường thẳng đồng quy.

Bài toán 4.8. (IMO 1982-5) Các đường chéo AC và CE của hình lục giác được chia bởi các điểm M, N tương ứng sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$. Hãy xác định r nếu B, M, N thẳng hàng.

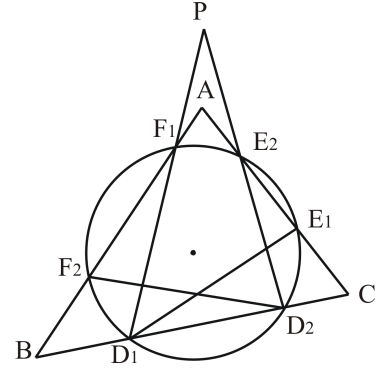
Lời giải.

Gọi P là giao điểm của BE và AC . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CPE và đường thẳng BMN , ta có

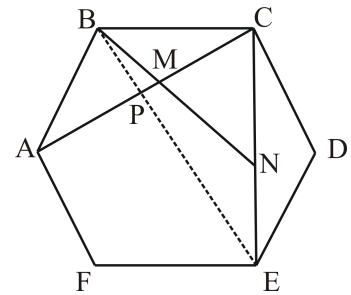
$$\frac{CM}{MP} \cdot \frac{PB}{BE} \cdot \frac{EN}{NC} = 1. \quad (4.10)$$

Lưu ý rằng

$$\frac{CM}{MP} = \frac{1-r}{r-\frac{1}{2}} = \frac{2-2r}{2r-1}. \quad (4.11)$$



Hình 4.13



Hình 4.14

$$PB = AB \cdot \cos \widehat{ABP} = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}BE \Rightarrow \frac{PB}{BE} = \frac{1}{4}. \quad (4.12)$$

$$\frac{EN}{NC} = \frac{1-r}{r}. \quad (4.13)$$

Thay (4.11), (4.12), (4.13) vào (4.10) ta được

$$\frac{2-2r}{2r-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1-r}{r} = 1. \quad \text{Vậy } r = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bài toán 4.9. (Olympic Toán học Canada, 2001) Cho tam giác ABC với $AB > AC$. Gọi P là giao điểm của đường trung trực của BC và đường phân giác trong của góc A . Đặt các điểm X trên AB và Y trên AC sao cho PX vuông góc với AB và PY vuông góc với AC . Gọi Z là giao điểm của XY và BC . Xác định giá trị tỉ số $\frac{BZ}{ZC}$.

Lời giải.

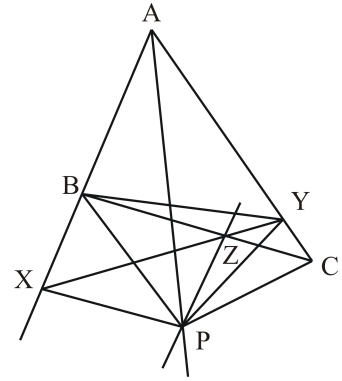
Vì $\widehat{PAX} = \widehat{PAY} = \widehat{PXA} = \widehat{PYA} = 90^\circ$ nên $\triangle PAX = \triangle PAY$. Suy ra $AX = AY$ và $PX = PY$.

Do P nằm trên trung trực của BC , ta có $PB = PC$.

Như thế, $\triangle PYC$ và $\triangle PXB$ là hai tam giác vuông bằng nhau, suy ra $CY = BX$.

Vì X, Y, Z thẳng hàng, áp dụng định lý Menelaus ta được $\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XA} = 1$.

Nhưng $AX = AY, CY = BX$ nên tỉ số $\frac{BZ}{ZC} = 1$.



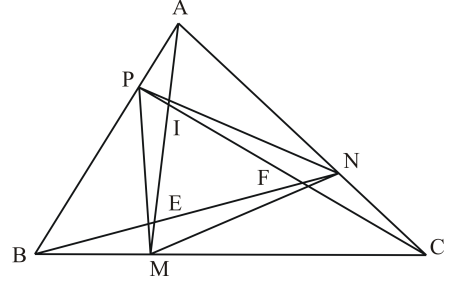
Hình 4.15

Bài toán 4.10. (Olympic Toán học 30-4 lần thứ 6 TP. HCM, Việt Nam) Cho tam giác ABC có diện tích $S_0 = 1$. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy các điểm M, N, P sao cho $\frac{MB}{MC} = k_1, \frac{NC}{NA} = k_2, \frac{PA}{PB} = k_3 (k_1, k_2, k_3 < 1)$. Tính diện tích tam giác tạo bởi ba đoạn thẳng AM, BN và CP .

Lời giải.

Gọi EIF là tam giác tạo bởi ba đoạn thẳng AM, BN, CP. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{S_{BCN}}{S_0} &= \frac{CN}{CA} = \frac{k_2}{k_2 + 1} \\ \Rightarrow S_{BCN} &= \frac{k_2}{k_2 + 1} S_0, \\ \frac{S_{BCF}}{S_{BCN}} &= \frac{BF}{BN}.\end{aligned}$$



Hình 4.16

Áp dụng định lý Menelaus vào $\triangle ABN$ với đường PCF , ta có:

$$\frac{FB}{FN} \cdot \frac{CN}{CA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \Rightarrow \frac{FB}{FN} = \frac{1 + k_2}{k_2 k_3} \Rightarrow \frac{BF}{BN} = \frac{1 + k_2}{1 + k_2 + k_2 k_3}.$$

Từ đó $S_{BCF} = \frac{k_2}{1 + k_2 + k_2 k_3} \cdot S_0$.

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$S_{ACI} = \frac{k_3}{1 + k_3 + k_2 k_3}; \quad S_{ABE} = \frac{k_1}{1 + k_1 + k_2 k_3}.$$

$$\text{Vậy ta có } S = 1 - \left(\frac{k_2}{1 + k_2 + k_2 k_3} + \frac{k_3}{1 + k_3 + k_2 k_3} + \frac{k_1}{1 + k_1 + k_2 k_3} \right).$$

Chương 5

Đường tròn

5.1. Phương tích của một điểm - Trục đẳng phương

5.1.1. Định lý về các dây cung cắt nhau

Định lý 5.1. Giả sử hai đường thẳng cắt nhau tại P và cắt đường tròn tại các điểm tương ứng là A, A' và B, B' . Khi đó, $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$. Điều này đúng cho cả ba trường hợp P nằm trong, ngoài đường tròn hay khi PA là tiếp tuyến (A, A' trùng nhau).

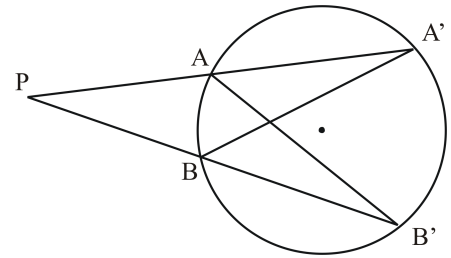
Chứng minh.

Trường hợp 1. Điểm P nằm ngoài đường tròn.

Xét $\triangle PAB'$ và $\triangle PBA'$ có $\widehat{P}$ chung và $\widehat{PA'B} = \widehat{PB'A}$ (cùng chắn cung AB).

Vậy $\triangle PAB' \sim \triangle PBA'$ (g.g), suy ra

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PB'}{PA'} \Leftrightarrow PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$$
 (đpcm).



Hình 5.1

Các trường hợp P nằm trong đường tròn, PA là tiếp tuyến chứng minh tương tự.

Hệ quả 5.1. Cho đường tròn có bán kính r , khoảng cách từ P (bất kỳ) đến tâm đường tròn là d . Giả sử đường thẳng di động qua P cắt đường tròn tại hai điểm A và A' . Khi đó ta có $PA \cdot PA' = r^2 - d^2$ (nếu P nằm trong đường tròn) và $PA \cdot PA' = d^2 - r^2$ (nếu P nằm ngoài đường tròn).

Chứng minh. Từ chứng minh định lý trên khi cát tuyến PBB' đi qua tâm O ta có $PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = (d - r)(d + r) \Leftrightarrow PA \cdot PA' = d^2 - r^2$.

5.1.2. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Định nghĩa 5.1. Ta gọi đại lượng $d^2 - r^2$ là phương tích của điểm P đối với đường tròn đã cho (khi P nằm trên đường tròn, ta có phương tích của P bằng 0).

Bài toán 5.1. (Thi vô địch Quốc gia Belarus, vòng 4, 2000).

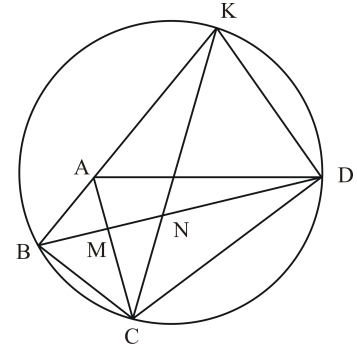
Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AC , BD của tứ giác lồi $ABCD$. Đường phân giác của góc $\widehat{ACD}$ cắt tia BA tại K . Giả sử $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$. Chứng minh rằng $\widehat{BKC} = \widehat{CBD}$.

Lời giải.

Gọi N là giao điểm của CK và BD . Áp dụng định lý đường phân giác vào tam giác MCD ta có

$$\frac{CD}{DN} = \frac{MC}{MN} \Leftrightarrow CD = \frac{MC \cdot DN}{MN}.$$

Khi đó ta được $MB \cdot MD = MA \cdot MC + MA \cdot \frac{MC \cdot DN}{MN} = MA \cdot MC \cdot \frac{MD}{MN}$ hay $MA \cdot MC = MB \cdot MN$. Do M nằm bên trong tứ giác lồi $ABCD$, từ định lý phương tích của một điểm, suy ra K, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Vậy $\widehat{BKC} = \widehat{CBD}$.



Hình 5.2

Bổ đề 5.1. Cho tam giác ABC . H là điểm nằm trên cạnh BC . Khi đó AH là đường cao nếu và chỉ nếu $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$.

Chứng minh. Nếu AH là đường cao, định lý Pythagoras cho ta $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$. Ngược lại nếu $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$, ta gọi M là điểm trên BC sao cho AM là đường cao. Khi đó, theo chứng minh trên, $AB^2 - AC^2 = MB^2 - MC^2$. Từ đó ta được

$$\begin{aligned} HB^2 - HC^2 &= MB^2 - MC^2 \\ \Leftrightarrow (HB + HC)(HB - HC) &= (MB + MC)(MB - MC) \\ \Leftrightarrow BC(HB - HC) &= BC(MB - MC) \\ \Leftrightarrow HB - HC &= MB - MC \\ \Leftrightarrow M &\equiv H. \end{aligned}$$

Bài toán 5.2. (Olympic Toán Quốc tế, 1985). Cho tam giác ABC . Một đường tròn tâm O đi qua các điểm A và C và lại cắt các đoạn AB , BC theo thứ tự tại hai điểm phân biệt K và N . Giả sử các đường tròn ngoại

tiếp của tam giác ABC và KBN cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt B và M . Chứng minh góc $\widehat{OMB}$ vuông.

Lời giải.

Gọi $AC \cap KN \equiv P$. Do $\widehat{KMA} = \widehat{BMA} - \widehat{BMK} = \widehat{BCA} - \widehat{BNK} = \widehat{KPA}$, nên bốn điểm M, P, A, K nằm trên một đường tròn. Ngoài ra $\widehat{AMP} = \widehat{AKP} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{AMB}$ (tứ giác $ACNK$ nội tiếp). Vậy điểm M nằm trên đoạn BP .

Đặt $BO = b, PO = p$ và gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ACNK$, ta có: $BM \cdot BP = BK \cdot BA = b^2 - R^2$; $PM \cdot PB = PK \cdot PN = p^2 - R^2$.

Cộng từng vế hai đẳng thức này ta được $BP^2 = b^2 + p^2 - 2R^2$, khi đó $BM^2 - PM^2 = \left(\frac{b^2 - R^2}{BP}\right)^2 - \left(\frac{p^2 - R^2}{BP}\right)^2$

$$= \frac{(b^2 + p^2 - 2R^2)(b^2 - p^2)}{BP^2} = b^2 - p^2 = BO^2 - PO^2.$$

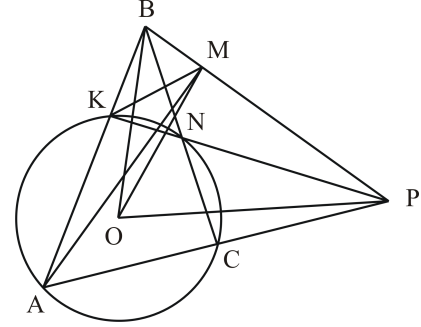
Từ đó suy ra $OM \perp BP$.

Bài toán 5.3. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O . Tiếp tuyến của (O) tại các tiếp điểm A, B, C lần lượt cắt các cạnh BC, CA và AB tại các điểm P, Q, R . Chứng minh rằng P, Q, R thẳng hàng.

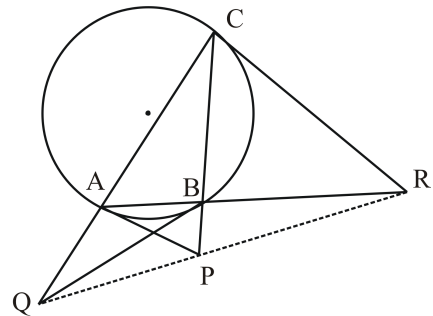
Lời giải.

Ta có $\triangle RCA \sim \triangle RCB$ (g.g), nên $\frac{RB}{RC} = \frac{RC}{RA} = \frac{BC}{AC}$.

$$\text{Do đó } \frac{RB}{RC} \cdot \frac{RC}{RA} = \frac{RB}{RA} = \left(\frac{RC}{RA}\right)^2 = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2.$$



Hình 5.3



Hình 5.4

Tương tự, ta có $\frac{QA}{QC} = \left(\frac{BA}{BC}\right)^2$ và $\frac{PC}{PB} = \left(\frac{AC}{BA}\right)^2$.

$$\Rightarrow \frac{RB}{RA} \cdot \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BA}{BC}\right)^2 \cdot \left(\frac{AC}{BA}\right)^2 = 1.$$

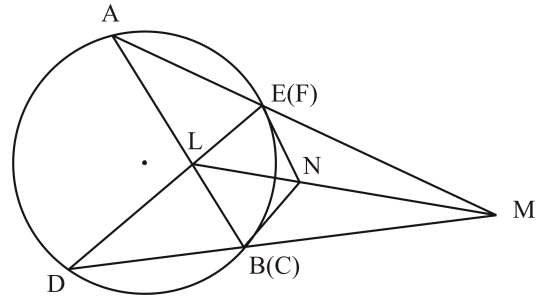
Theo định lý Menelaus P, Q, R thẳng hàng (đpcm).

Ta có thể chứng minh theo định lý Pascal khi lục giác $AABBCC$ suy biến thành tam giác ABC .

Bài toán 5.4. Cho 4 điểm A, E, B, D nằm trên đường tròn (theo thứ tự là chiều kim đồng hồ). Tiếp tuyến của đường tròn tại B, E cắt nhau tại N , hai đường thẳng AE và DB cắt nhau tại M , AB, DE cắt nhau tại L . Chứng minh rằng L, N, M thẳng hàng.

Lời giải.

Áp dụng định lý Pascal vào lục giác suy biến $ABCDEF$ với $B \equiv C, E \equiv F$. Cạnh BC và EF suy biến và lần lượt tiếp xúc với đường tròn tại B và E .



Hình 5.5

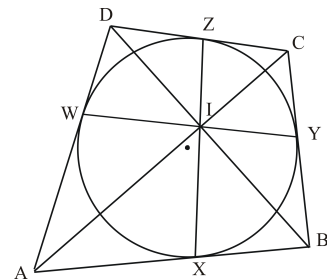
Bài toán 5.5. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn.

Gọi X, Y, Z, W lần lượt là tiếp

điểm của đường tròn nội tiếp tứ giác với các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng các đường thẳng XZ, YW, AC, BD đồng quy.

Lời giải.

Ta chứng minh bằng trường hợp suy biến của định lý Brianchon. Chẳng hạn như lấy hình lục giác $ABYCDW$ khi đó ta có AC, BD, YW đồng quy. Tương tự với lục giác $AXBCZD$ có AC, BD, XZ đồng quy. Vì vậy XZ, YW, AC, BD đồng quy.

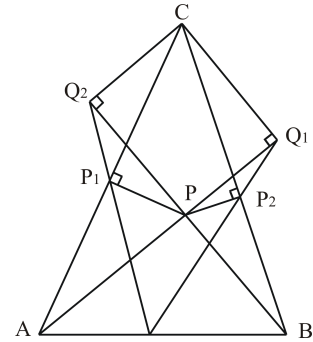


Hình 5.6

Bài toán 5.6. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ nằm trong tam giác. Gọi P_1, P_2 lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P xuống các cạnh AC, BC tương ứng. Kéo dài AP và BP . Gọi Q_1, Q_2 lần lượt là hình chiếu của C trên AP và BP . Chứng minh rằng Q_1P_2, Q_2P_1 và AB đồng quy.

Lời giải.

Ta có $\widehat{CP_1P}, \widehat{CP_2P}, \widehat{CQ_2P}, \widehat{CQ_1P}$ nhìn đoạn CP dưới một góc vuông, vậy các điểm C, Q_1, P_1, P, P_2, Q_2 cùng nằm trên đường tròn đường kính PC . Lại có CP_1 và Q_1P cắt nhau tại A , Q_2P và CP_2 cắt nhau tại B . Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $CP_1Q_2PQ_1P_2$ ta thấy P_2Q_1 và Q_1P_2 cắt nhau tại điểm X nằm trên AB . Vậy Q_1P_2, Q_2P_1 và AB đồng quy (đpcm).



Hình 5.7

5.1.3. Trục đẳng phương và tâm đẳng phương

Định nghĩa 5.2. Cho hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ với tâm tương ứng là O_1, O_2 . Tập hợp các điểm có cùng phương tích với hai đường tròn (C_1) và (C_2) được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn. Trục đẳng phương của hai đường tròn vuông góc với đường thẳng O_1O_2 .

Định nghĩa 5.3. Trong trường hợp có 3 đường tròn $(C_1), (C_2), (C_3)$ có tâm tương ứng là O_1, O_2, O_3 không thẳng hàng. Ba trục đẳng phương của ba cặp đường tròn đồng quy tại một điểm gọi là tâm đẳng phương của ba đường tròn.

Định lý 5.2. (Cách xác định trục đẳng phương của hai đường tròn). Nếu hai đường tròn giao nhau tại hai điểm thì trục đẳng phương chính là đường thẳng nối hai giao điểm (đường thẳng này vuông góc với đường nối hai tâm). Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì trục đẳng phương chính là đường thẳng đi qua tiếp điểm và vuông góc với đường nối hai tâm. Nếu hai đường tròn (C_1) và (C_2) không giao nhau, ta xác định trục đẳng phương bằng cách vẽ đường tròn (C_3) giao với cả hai đường tròn đó. Xác định giao điểm P của hai trục đẳng phương giữa $(C_1), (C_3)$ và

$(C_2), (C_3)$. Khi đó trục đẳng phương của (C_1) và (C_2) là đường thẳng đi qua P và vuông góc đường nối hai tâm của (C_1) và (C_2) .

Hệ quả 5.2. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ và $CDEF$. Nếu ba đường thẳng AB, CD, FE đồng quy thì tứ giác $ABEF$ cũng nội tiếp.

5.2. Định lí Euler

Leonhard Euler (1707-1783) sinh ra và lớn lên tại Thụy Sĩ. Ông tốt nghiệp Đại học Tổng hợp Basel (Thụy Sĩ) khi mới 15 tuổi. Từ 1727 đến 1741, Euler làm việc tại St.Petersburg, nước Nga, sau chuyển đến Berlin, nước Đức. Năm 1766 ông trở về Petersburg và ở đó đến cuối đời. Tên tuổi của ông thường xuyên được nhắc đến qua mọi thời kì, trên thế giới. Chúng ta đã gặp các kí hiệu quen thuộc về các cạnh a, b, c của tam giác ABC , kí hiệu bán kính R và r , kí hiệu hàm $f(x)$, $\sin x$, $\cos x$, số e trong logarithm,... đó là những kí hiệu mà lịch sử toán ghi nhận rằng Euler là người đầu tiên sử dụng.

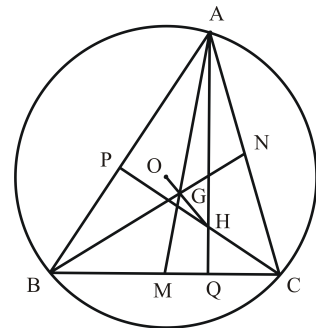
5.2.1. Đường thẳng Euler

Định lý 5.3. Cho tam giác ABC có H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Khi ấy H, G, O thẳng hàng. Đường thẳng chứa H, G, O được gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC .

Chứng minh.

Cách 1. Bằng công cụ vectơ và phép biến hình.

Xét $V_G(-\frac{1}{2})$ ta có $A \rightarrow M, B \rightarrow N, C \rightarrow K \Rightarrow \Delta ABC \rightarrow \Delta MNK$ và trực tâm H của tam giác ΔABC biến thành trực tâm O của ΔMNK , suy ra $\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$. Vậy G, O, H thẳng hàng (đpcm).



Hình 5.8

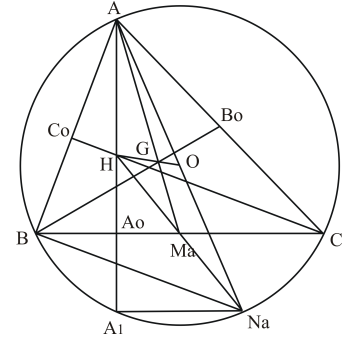
Cách 2. Gọi A_1 là điểm đối xứng của H qua BC ; N_a là điểm đối xứng của H qua M_a .

Khi ấy, ta có: $\widehat{A_1BA_0} = \widehat{HBA_0} = \widehat{B_0BA_0}$. Nhưng $\widehat{B_0BA_0} = \widehat{A_0AC} = \widehat{A_1AC}$. Do vậy $\widehat{A_1BC} = \widehat{A_1BA_0} = \widehat{A_1AC}$. Suy ra $A_1 \in (ABC)$.

Mặt khác dễ thấy $HB N_a C$ là hình bình hành.

Do đó $\widehat{BN_aC} = \widehat{BHC} = \widehat{C_0HB_0} = 180^\circ - \widehat{C_0AB_0} = 180^\circ - \widehat{BAC}$.

Điều này chứng tỏ $N_a \in (ABC)$. A_0M_a giờ đây đóng vai trò là đường trung bình của tam giác HA_1N_a . Suy ra $A_0M_a \parallel A_1N_a$. Nhưng $A_0M_a \equiv BC \perp AA_1$. Suy ra $A_1N_a \perp AA_1 \Rightarrow \widehat{AA_1N_a} = 90^\circ$.



Hình 5.9

Do vậy A, N_a sẽ là hai điểm đối xứng nhau qua tâm O của (ABC) , dẫn đến A, O, N_a thẳng hàng.

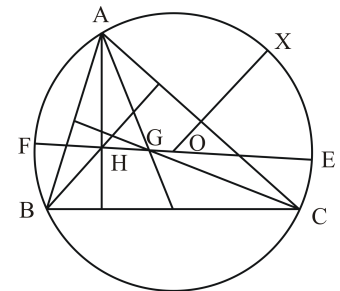
Xét tam giác AHN_a , Gọi G là trọng tâm của tam giác. Khi đó $G \in AM_a$ và $\frac{AG}{AM_a} = \frac{2}{3}$. Suy ra G cũng là trọng tâm của tam giác ABC . Mặt khác HO là một trung tuyến từ H của tam giác AHN_a . Suy ra $G \in HO$.

Vậy 3 điểm H, O, G thẳng hàng.

Bài toán 5.7. (Dự tuyển IMO, 1986) Cho tam giác ABC . Gọi O, H, G lần lượt là tâm vòng tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của tam giác đó. Giả sử X là điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đặt $T = XA^2 + XB^2 + XC^2$; E, F là các điểm thuộc đường tròn trên và tại đó T lần lượt nhận những giá trị tương ứng lớn nhất, nhỏ nhất. Chứng minh rằng năm điểm H, O, G, E, F cùng thuộc một đường thẳng.

Lời giải.

Theo định lý về đường thẳng Euler ta có G, H, O thẳng hàng. Với X là điểm thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC , ta có: $T = XA^2 + XB^2 + XC^2 = \overrightarrow{XA}^2 + \overrightarrow{XB}^2 + \overrightarrow{XC}^2 = (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OC})^2 = 6R^2 + 2.\overrightarrow{XO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, với R là bán kính của đường tròn (O) .



Hình 5.10

Do $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$ nên $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Từ các đẳng thức trên suy ra: $M = 6R^2 - 2\overrightarrow{XO} \cdot \overrightarrow{OH}$ suy ra $M = 6R^2 - 2.R.OH.\cos\alpha$, trong đó α là góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OH}$. Từ đẳng thức cuối ta suy ra T nhận giá trị lớn nhất khi $\cos\alpha$ bé nhất, hay $\cos\alpha = -1$; khi đó $X \equiv E$, nằm khác phía với H đối với O . Và T nhận giá trị bé nhất khi $X \equiv F$ nằm cùng phía với H đối với O , tương ứng với $\cos\alpha = 1$.

Vậy các điểm G, H, O, E, F cùng thuộc một đường thẳng (đpcm).

5.2.2. Đường tròn Euler

Ba trung điểm các cạnh của một tam giác, ba hình chiếu của các đỉnh lên các cạnh đối diện, ba trung điểm các đoạn nối từ trực tâm của tam giác đến các đỉnh cùng nằm trên một đường tròn. **Đường tròn này gọi là đường tròn chín điểm Euler.** Đường tròn này có tâm là trung điểm của đoạn nối trực tâm với giao điểm của các đường trung trực.

Bài toán này được EULER (1707 - 1783) đưa ra và chứng minh cho 6 điểm, đó là trung điểm của các cạnh của tam giác và hình chiếu của các đỉnh của tam giác lên các cạnh đối diện. Đến năm 1820, BRIANCHON (1783 - 1864) và PONCELET (1778 - 1876) chứng minh thêm rằng 3 đường tròn 6 điểm nói trên còn đi qua trung điểm của các đoạn nối từ trực tâm đến các đỉnh của tam giác.

Bổ đề 5.2. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là hình chiếu của A, B, C tương ứng lên BC, CA, AB . Gọi M_a lần lượt là trung điểm của BC , O_a là trung điểm của HA . Chứng minh rằng M_a, O_a nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_0B_0C_0$.

Chứng minh. Thật vậy ta có $BB_0 \perp AC$ tại $B_0 \Rightarrow \widehat{BB_0C} = 90^\circ$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\widehat{BC_0C} = 90^\circ$. Từ đó suy ra được B, C, B_0, C_0 cùng thuộc đường tròn đường kính BC , hơn nữa M_a còn là tâm của đường tròn đó. Lập luận tương tự ta cũng chứng minh được các tứ giác sau đây nội tiếp đường tròn: Tứ giác $C_0HA_0B, HB_0CA_0, AC_0HB_0$, trong đó O_a là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AC_0HB_0 . Khi

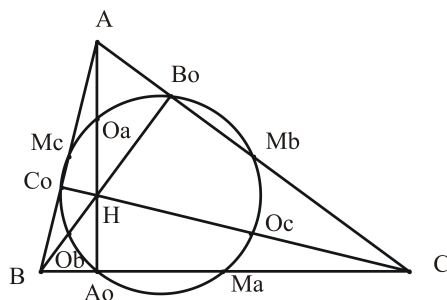
ây, ta được $\widehat{B_0M_aC_0} = 2\widehat{C_0CB_0} = 2\widehat{C_0BB_0} = 2\widehat{C_0A_0H} = 2\widehat{HA_0B_0}$
 $\Rightarrow \widehat{B_0M_aC_0} = \widehat{C_0A_0B_0}$.

Suy ra $C_0A_0M_aB_0$ nội tiếp, tức là $M_a \in (A_0B_0C_0)$ (1)

Ta lại có $\widehat{O_aB_0H} = \widehat{O_aHB_0} = \widehat{B_0CA_0} = \widehat{B_0CB} \Rightarrow A_0B_0$ là tiếp tuyến từ O_a đến đường tròn $\left(M_a, \frac{BC}{2}\right)$, lập luận tương tự cho O_aC_0 .

Suy ra $\widehat{O_aC_0M_a} = \widehat{O_aB_0M_a} = 90^\circ \Rightarrow C_0O_aB_0M_a$ nội tiếp đường tròn (2). Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán ban đầu: Ta gọi O_b, O_c lần lượt là trung điểm của HB, HC ; M_b, M_c lần lượt là trung điểm của CA, AB . Khi đó lập luận tương tự như trên ta có O_b, M_b, O_c, M_c thuộc $(A_0B_0C_0)$. Do vậy $O_a, O_b, O_c, M_a, M_b, M_c, A_0, B_0, C_0$ là **9 điểm cùng thuộc một đường tròn**. Đây chính là đường tròn **Euler** của tam giác ABC .



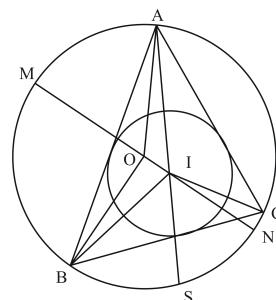
Hình 5.11

5.2.3. Công thức Euler

Bổ đề 5.3. Cho đường tròn tâm I bán kính r nằm bên trong đường tròn tâm O bán kính R . Giả sử A là điểm tùy ý trên đường tròn lớn, AB và AC là hai dây cung của đường tròn này, chúng tiếp xúc với đường tròn nhỏ. Lúc đó, BC là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ nếu và chỉ nếu $IO = \sqrt{R(R - 2r)}$.

Chứng minh.

Gọi S là điểm trên đường tròn lớn sao cho AF là phân giác góc BAC . Nối CI và CS . Khi đó, BC là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ nếu và chỉ nếu $\widehat{BCI} = \widehat{ICA}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{SCI} = \widehat{CIS}$, bởi vì $\widehat{CIS} = \widehat{ICA} + \widehat{IAC} = \widehat{ICA} + \widehat{SCB}$.



Hình 5.12

Hơn nữa, $\widehat{SCI} = \widehat{CIS}$ khi và chỉ khi $SC = SI$. Gọi MN là đường kính đi qua I và O của đường tròn lớn. Lúc đó, $SC = SI$ nếu và chỉ nếu $SI.IA = SC.IA = 2R \sin \alpha \cdot \frac{r}{\sin \alpha} = 2rR$, với $\alpha = \widehat{CAS}$. Tuy nhiên dễ thấy $SI.IA = MI.IN = (R-d)(R+d)$, với $d = IO$. Suy ra, ta có $SI.IA = 2rR$ nếu và chỉ nếu $(R-d)(R+d) = 2rR$, hay $d^2 = R^2 - 2rR$ (đpcm).

Định lý 5.4. (Công thức Euler).

Cho R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của một tam giác. Khi đó, khoảng cách d giữa hai tâm của hai đường tròn này là $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Chứng minh.

Cách 1. Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC . M là giao của phân giác góc B với (O) . Ta có $BI.IM = R^2 - IO^2 = R^2 - d^2$. Tam giác ICM cân tại M (vì $\widehat{CIM} = \widehat{ICM} = \frac{B+C}{2}$).

Kẻ đường kính MK của đường tròn (O) và kẻ $ID \equiv BC$, suy ra $\triangle MKC \sim \triangle IBD \Rightarrow \frac{MK}{MC} = \frac{IB}{ID}$. Nhưng $MK = 2R, ID = r, MC = MI$ nên: $2Rr = IB.MC = IB.IM = R^2 - d^2 \Rightarrow d^2 = R^2 - 2Rr$ (đpcm).

Cách 2. Gọi L là giao của phân giác góc B với AC . Theo tính chất đường phân giác trong các tam giác ABC và BCL , ta có

$$\frac{LC}{AL} = \frac{a}{c} \Rightarrow LC = \frac{ab}{a+c}; \quad \frac{BI}{IL} = \frac{a}{LC} = \frac{a+c}{b}.$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{b.\overrightarrow{OB} + (a+c).\overrightarrow{OL}}{a+b+c} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{OL} = \frac{a.\overrightarrow{OA} + c.\overrightarrow{OC}}{a+c} \quad \text{suy ra} \\ \overrightarrow{OI} &= \frac{a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + c.\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \Rightarrow d^2 = \left(\frac{a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + c.\overrightarrow{OC}}{a+b+c} \right)^2. \end{aligned}$$

Do đó ta đi đến

$$d^2 = \frac{1}{4p^2} \cdot \{ (a^2 + b^2 + c^2)R^2 + ab(2R^2 - c^2) + bc(2R^2 - a^2) + ca(2R^2 - b^2) \}$$

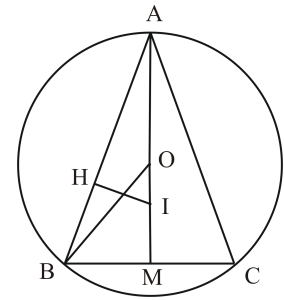
$$= R^2 - \frac{abc}{2P}.$$

Mặt khác, $S = pr = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 2Rr = \frac{abc}{2p}$ nên ta được $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Bài toán 5.8. (IMO, 1962) Cho R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của một tam giác cân. Khi đó, khoảng cách d giữa hai tâm của hai đường tròn này là $\sqrt{R(R - 2r)}$.

Lời giải.

Giả sử ABC là tam giác có $AB = AC$, gọi O và I tương ứng là tâm các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp. Đặt d là khoảng cách IO , ta quy ước rằng $d > 0$ nếu O gần A hơn I , và $d < 0$ nếu I gần A hơn O . Ở đây ta trình bày và vẽ hình trong trường hợp O gần A hơn I , trường hợp còn lại kết quả vẫn không thay đổi với quy ước trên. Gọi α là góc OAB , M là trung điểm BC . Kẻ $IH \perp AB$. Khi đó



Hình 5.13

$$\sin \alpha = \frac{HI}{AI} = \frac{HI}{AO + OI} = \frac{r}{R + d}, \quad \text{hay} \quad r = (R + d) \sin \alpha. \quad (5.1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos \widehat{BOM} = \frac{OM}{OB} = \frac{OI + IM}{OB} = \frac{r + d}{R},$$

$$\text{hay} \quad r + d = R \cos 2\alpha. \quad (5.2)$$

Kết hợp (5.1), (5.2) và sử dụng công thức $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ ta tìm được hệ thức $(d + R + r)[d^2 - R(R - 2r)] = 0$. Nếu $d > 0$ như trường hợp ta đang xét thì hiển nhiên $(d + R + r) > 0$, còn nếu $d < 0$ như trường hợp còn lại thì ta luôn có $OI < OA$ nên ta cũng có $(d + R + r) > 0$. Vì vậy $[d^2 - R(R - 2r)] = 0 \Leftrightarrow d = \sqrt{R(R - 2r)}$ (đpcm).

5.3. Đường tròn Apollonius

Apollonius sinh vào khoảng năm 262 trước CN tại Perga, bây giờ thuộc Thổ Nhĩ Kỳ. Ông mất vào khoảng năm 190 trước CN tại Alexandria, Ai Cập. Ông được mệnh danh là "Ông vua Hình học", tác phẩm đồ sộ còn lại đến ngày nay là bộ sách gồm 8 cuốn Conics (các đường Cô-níc).

Định lý 5.5. Cho đoạn thẳng $AB=a$ cố định, m là số cho trước ($0 < m < 1$). M là điểm chuyển động sao cho $\frac{MA}{MB} = m$. Khi đó, quỹ tích các điểm M là một đường tròn và đường tròn này được gọi là **đường tròn Apoloni** tương ứng với hai điểm A, B và tỉ số m .

Chứng minh.

Cách 1. Chứng minh bằng phương pháp Hình học giải tích.

Chọn hệ thống trục tọa độ vuông góc sao cho $A = (a; 0)$ và $B = (b; 0)$. Giả sử M có tọa độ (x, y) .

Điều kiện $\frac{MA}{MB} = m$ tương đương với $MA^2 = m^2 MB^2$, tức là

$$(x - a)^2 + y^2 = m^2((x - b)^2 + y^2).$$

Nhóm lại các số hạng rồi chia cho $1 - m^2$ ta được

$$x^2 + \frac{2m^2b - 2a}{1 - m^2}x + y^2 = \frac{m^2b^2 - a^2}{1 - m^2}.$$

Đây chính là phương trình đường tròn có tâm nằm trên trục hoành, tức là nằm trên AB .

Cách 2.

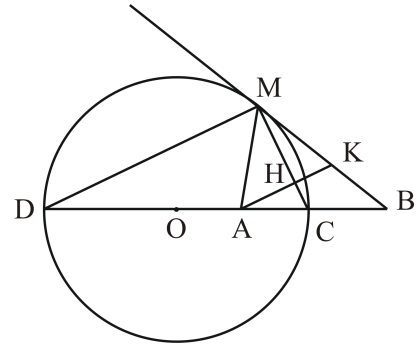
Vẽ MC, MD lần lượt là đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{AMB}$ ($C, D \in AB$). Ta có MC, MD là hai tia phân giác của hai góc kề bù, suy ra

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} \text{ và } \widehat{DMC} = 90^\circ.$$

Từ đó, theo tính chất tỉ lệ thức ta có:

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB} = \frac{m}{1} &\Rightarrow \frac{CA}{CA + CB} = \frac{m}{m + 1} \\ \Rightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{m}{m + 1} &\Rightarrow CA = \frac{m}{m + 1}a \quad (\text{không đổi}). \end{aligned}$$

Vậy C là điểm cố định.



Hình 5.14

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{DA}{DB - DA} = \frac{m}{1 - m} \Rightarrow \frac{DA}{AB} = \frac{m}{1 - m} \Rightarrow DA = \frac{m}{1 - m}a \text{ (không đổi).}$$

Suy ra D là điểm cố định.

Do $\widehat{DMC} = 90^\circ$, mà DC cố định nên M thuộc đường tròn cố định có đường kính DC .

Đảo lại, lấy điểm M bất kì trên đường tròn đường kính DC , ta có $\widehat{DMC} = 90^\circ$. Vẽ $HA \perp MC (H \in MC)$, $AH \sim MB \equiv K$.

$$\begin{cases} AH \perp MC \\ DM \perp MC \end{cases} \Rightarrow AH \parallel DM \Rightarrow \begin{cases} \frac{AK}{DM} = \frac{AB}{DB} \\ \frac{DM}{AH} = \frac{CD}{CA} \end{cases}$$

$$\text{Ta lại có } DB = DA + AB = \frac{m}{1 - m} \cdot a + a = \frac{1}{1 - m} \cdot a \text{ nên}$$

$$\frac{AK}{DM} = \frac{AB}{DB} = \frac{a}{\frac{1}{1 - m} \cdot a} = 1 - m. \quad (5.3)$$

$$\text{Ta cũng có } CD = CA + AD = \frac{m}{m + 1} \cdot a + \frac{M}{1 - m} \cdot a = \frac{2m}{1 - m^2} a, \\ \text{suy ra}$$

$$\frac{AH}{DM} = \frac{CA}{CD} = \frac{m + 1}{\frac{2m}{1 - m^2} \cdot a} = \frac{1 - m}{2}. \quad (5.4)$$

$$\text{Từ (5.3) và (5.4) suy ra } \frac{AK}{DM} = 2 \cdot \frac{AH}{DM} \Rightarrow AK = 2AH.$$

Vậy H là trung điểm AK . $\triangle MAK$ có $MH \perp AH$, H là trung điểm AK , do đó $\triangle MAK$ cân tại M , suy ra MC là phân giác của góc $\widehat{MAB}$

$$\begin{cases} \widehat{AMx} + \widehat{AMB} = 180^\circ & (\text{kề bù}) \\ \widehat{DMA} + \widehat{AMC} = 180^\circ & (= \widehat{DMC}) \end{cases} \Rightarrow \widehat{DMA} = \frac{1}{2} \widehat{AMx}.$$

Vậy MD là phân giác của $\widehat{AMx}$. Tóm lại, tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính DC .

5.4. Định lí Simson

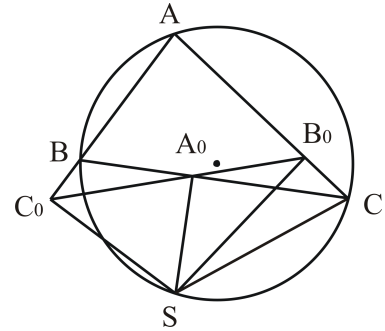
Định lý 5.6. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm (O) , giả sử S là một điểm nằm trên (O) sao cho S không trùng với các đỉnh A, B, C của tam giác. Giả sử A_0, B_0, C_0 là hình chiếu của S tương ứng trên các cạnh BC, CA, AB . Khi đó A_0, B_0, C_0 thẳng hàng. Đường thẳng chứa A_0, B_0, C_0 được gọi là đường thẳng Simson của S đối với tam giác ABC .

Chứng minh.

Ta có $\widehat{CB_0S} = \widehat{CA_0S} = 90^\circ$, suy ra tứ giác A_0B_0SC là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{B_0A_0C} = \widehat{B_0SC}$.

Mặt khác, vì $ABSC$ nội tiếp nên

$$\begin{aligned}\widehat{C_0BS} &= \widehat{ACS} = \widehat{B_0CS} \\ \Rightarrow \Delta SC_0B &\sim \Delta SB_0C (g.g) \\ \Rightarrow \widehat{BSC} &= \widehat{CSB_0} \Rightarrow \widehat{BSC_0} = \widehat{B_0A_0C}.\end{aligned}$$



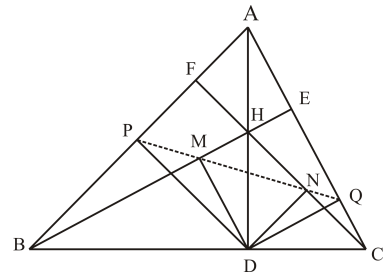
Hình 5.15

Nhưng vì A_0BC_0S là tứ giác nội tiếp ($\widehat{BA_0S} = \widehat{BC_0S} = 90^\circ$) nên $\widehat{BSC_0} = \widehat{BA_0C_0} \Rightarrow \widehat{B_0A_0C} = \widehat{BA_0C_0} \Rightarrow C_0, A_0, B_0$ thẳng hàng (đpcm).

Bài toán 5.9. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của A trên BC, B trên CA, C trên AB . Chân các đường vuông góc hạ từ D xuống AB, AC, BE, CF lần lượt là P, Q, M, N . Chứng minh rằng P, M, N, Q thẳng hàng.

Lời giải.

Rõ ràng tứ giác $BDHF$ là tứ giác tuần hoàn, đường thẳng simson của điểm D đi qua P, M, N . Nói cách khác P, M, N thẳng hàng. Tương tự như trên ta có Q, M, N thẳng hàng. Vậy P, M, N, Q thẳng hàng.



Hình 5.16

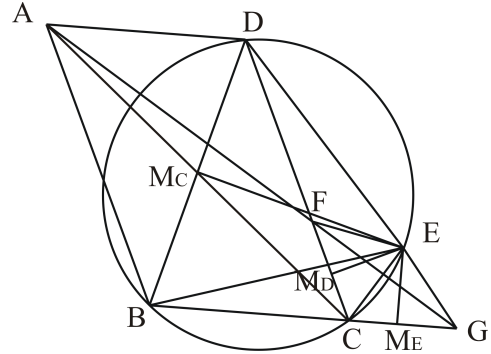
Bài toán 5.10. (IMO 2007) Xét 5 điểm A, B, C, D, E sao cho $ABCD$ là hình bình

hành và bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Gọi l là một đường thẳng đi qua A . Giả sử l cắt đoạn DC ở F và BC ở G . Giả sử $EG = EC$. Chứng minh rằng l là phân giác góc $\widehat{DAB}$

Lời giải.

Gọi M_E, M_D, M_C lần lượt là hình chiếu của E lên CB, CD, BD . Ta có theo giả thiết ban đầu thì E thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD , suy ra M_C, M_E, M_D thẳng hàng (đường thẳng Simson). Mặt khác $EG = EC = EF$ nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GCF , $\Rightarrow M_E, M_D$ là trung điểm của $CG, CF \Rightarrow M_E M_D$ là đường trung bình của tam giác $CGF \Rightarrow (M_E M_D M_C) // (AF) \equiv (GF) \Rightarrow M_C$ là trung điểm của CA cùng đồng thời là trung điểm của BD . Trong tam giác EBD , EM_C là đường cao đồng thời cũng là đường trung tuyến, suy ra tam giác EBD cân ở E , suy ra $EB = ED$.

Mặt khác $\widehat{EBC} = \widehat{EDC}$ suy ra tam giác EBM_E và tam giác EDM_D bằng nhau, suy ra $EM_E = EM_D \Rightarrow GC = CF \Rightarrow \triangle CFG$ cân ở C , suy ra $\widehat{CGF} = \widehat{CFG}$. Mà $\widehat{BAF} = \widehat{GFC}, \widehat{FAD} = \widehat{FGC} \Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{FAD} \Rightarrow FA$ là phân giác góc $\widehat{BAD}$ hay l là phân giác góc $\widehat{BAD}$.



Hình 5.17

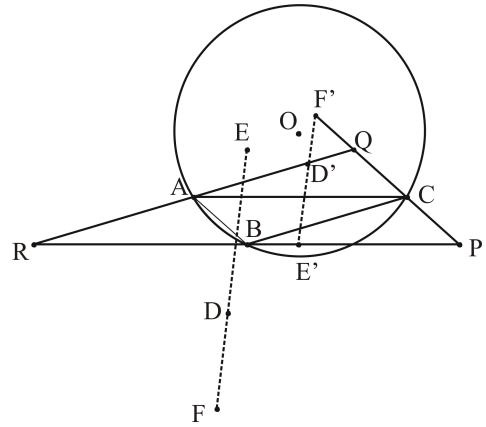
Bài toán 5.11. (IMO 1998 shortlisted problem) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O , bán kính R , H là trực tâm tam giác. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC , E là điểm đối xứng của B qua AC , F là điểm đối xứng của C qua AB . Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi $OH = 2R$.

Lời giải.

Cho $\triangle PQR$ là tam giác trung gian của tam giác ABC nghĩa là A là trung điểm QR , B là trung điểm RP và C là trung điểm của PQ . Từ O vẽ các đường vuông góc tới QR, RP, PQ chân các đường vuông góc tương ứng là D', E', F' .

Ta có thể xem xét và chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi D', E', F' thẳng hàng.

Bằng định lý Simson (và định lý đảo của nó) ta chứng minh D', E', F' thẳng hàng khi và chỉ khi O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR . Lưu ý rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR là đường tròn qua trực tâm H của tam giác ABC suy ra O nằm trên (PQR) khi và chỉ khi OH là đường kính của (PQR) suy ra $OH = 2R$.



Hình 5.18

Bài toán 5.12. (Olympic Toán học Canada, 2001) Cho tam giác ABC với $BA > AC$. Gọi P là giao điểm của đường trung trực của BC và đường phân giác trong của góc A . Dựng các điểm X trên AB và Y trên AC sao cho PX vuông góc với AB và PY vuông góc với AC . Gọi Z là giao điểm của XY và BC . Xác định giá trị tỉ số $\frac{BZ}{ZC}$.

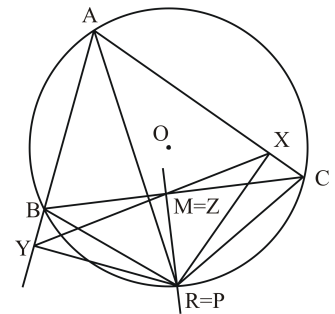
Lời giải.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Giả sử đường phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn này tại R .

Ta có $\widehat{BOR} = 2\widehat{BAR} = 2\widehat{CAR} = \widehat{COR}$. Như thế, $BR = CR$ và điểm R nằm trên trung trực của BC .

Vậy $R \equiv P$ và tứ giác $ABCP$ nội tiếp. Các điểm X, Y, M lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống các cạnh của $\triangle ABC$.

Từ đó theo định lý Simson, các điểm X, Y, M thẳng hàng. Như vậy ta có $M \equiv Z$ và $BZ = ZC = BM = MC = 1$. Vậy $\frac{BZ}{ZC} = 1$.



Hình 5.19

5.5. Định lí Steiner

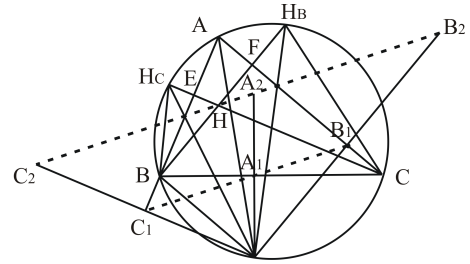
5.5.1. Đường thẳng Steiner

Định lý 5.7. Cho tam giác ABC và điểm D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tâm O của tam giác. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm đối xứng với D qua các đường thẳng BC, CA, AB thì chúng cùng thuộc một đường thẳng và đường thẳng này đi qua trực tâm H của tam giác ABC . Đường thẳng đó được gọi là đường thẳng Steiner ứng với điểm D của tam giác ABC . Còn điểm D được gọi là điểm anti steiner.

Chứng minh. Dễ thấy nếu gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của D xuống ba cạnh của tam giác ABC thì C_1 là trung điểm của đoạn DC_1 và tương tự ta có A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{B_2HC_2} &= \widehat{C_2HB} + \widehat{BHC} + \widehat{CHB_2} \\ &= \widehat{DH_CB} + \widehat{FHE} + \widehat{CH_BD} \\ &= \widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = \pi\end{aligned}$$



Hình 5.20

Vậy đường thẳng Steiner đi qua H .
Từ đó ta có được tính chất đường thẳng Simson ứng với điểm D đi qua trung điểm của đoạn DH

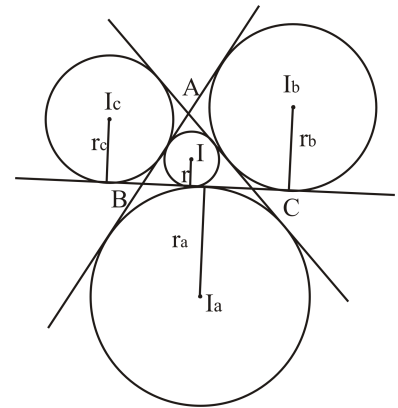
5.5.2. Định lí Steiner

Định lý 5.8.

Cho tam giác ABC . Lần lượt gọi r, r_a, r_b, r_c là bán kính tương ứng của đường tròn nội tiếp và ba đường tròn bàng tiếp đối diện các góc A, B, C của tam giác này. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó, ta có $r_a + r_b + r_c - r = 4R$.

Chứng minh.

Ta có $r_a + r_b + r_c = 4R + r$



Hình 5.21

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{abc}{S} + \frac{S}{p} \\
&\Leftrightarrow p(\sum(p-b)(p-c)) - (p-a)(p-b)(p-c) = abc \\
&\Leftrightarrow p(3p^2 - 2p(a+b+c) + \sum ab) - p^3 + p^2 \sum a - p \sum ab + abc = abc \\
&\Leftrightarrow -2p^3 + p^2 \sum a + p \sum ab - p \sum ab = 0 \quad (\text{đpcm}).
\end{aligned}$$

Định lý 5.9. (Điểm Anti Steiner) Cho ΔABC và đường thẳng d đi qua H trực tâm của tam giác ABC . Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là đường thẳng đối xứng của d qua BC, AC, AB . Các đường thẳng đó đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (điểm đó gọi là điểm Anti steiner của d). Và d được gọi là đường thẳng steiner của điểm đó (gọi là G).

Chứng minh.

Gọi H_A, H_B, H_C lần lượt là hình chiếu của H qua ba cạnh. Suy ra ba điểm này thuộc (O) ngoại tiếp tam giác ABC và H_A, H_B, H_C lần lượt thuộc d_a, d_b, d_c .

$$\begin{aligned}
(d_a, d_b) &= (d_a, BC) + (BC, CA) + \\
(CA, d_b) &= (BC, d) + (BC, CA) + \\
(d, CA) &= 2(BC, CA) = (CH_A, CH_B)(\text{mod} \pi).
\end{aligned}$$

Vậy nếu gọi giao điểm của d_a, d_b là G thì G thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tương tự ta có đpcm Theo hình của định lý đường thẳng steiner ta dễ thấy $H_C D$ đối xứng với $HC_2, H_B D$ đối xứng với HB_2 .

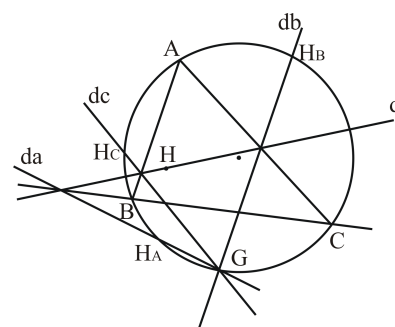
Vậy ta có d đúng là đường thẳng steiner của G .

Định lý 5.10. Gọi P là một điểm thuộc đường thẳng d . P_A, P_B, P_C lần lượt là điểm đối xứng với P qua các cạnh của tam giác ABC . Ta có các đường tròn $(AP_C P_B), (BP_C P_A), (CP_A P_B)$ cùng đi qua điểm G .

Chứng minh. Dễ thấy $\widehat{P_C A P_B} = 2\widehat{BAC}(\text{mod} \pi)$.

Theo chứng minh trên lại có $(d_c, d_b) = \widehat{P_C G P_B} = 2\widehat{BAC}(\text{mod} \pi)$.

Suy ra G thuộc đường tròn $(AP_C P_B)$. Tương tự có đpcm.



Hình 5.22

5.6. Định lý Pithot

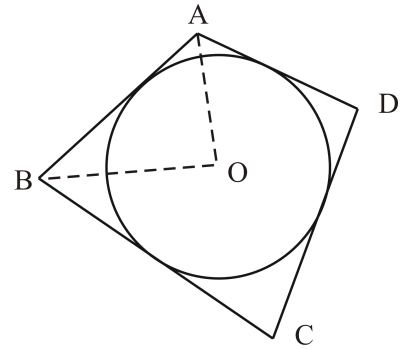
Định lý 5.11. Cho $ABCD$ là một tứ giác lồi. Khi đó, $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn nếu và chỉ nếu $AB + CD = AD + BC$.

Chứng minh.

Phần thuận. Dễ dàng thấy rằng nếu $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn thì $AB + CD = AD + BC$, điều này có được theo tính chất tiếp tuyến.

Phần đảo. Giả sử $ABCD$ thỏa mãn điều kiện $AB + CD = AD + BC$. Suy ra $|AD - CD| = |AB - BC| = 2a$ (không đổi, với a là số dương nào đó). Bằng cách vẽ hai đường phân giác góc A và B , ta dựng được đường tròn tiếp xúc với AB, AD và BC .

Gọi D' là điểm trên AD sao cho tứ giác $ABCD'$ ngoại tiếp đường tròn này. Theo phần thuận ở trên ta có $AB + CD' = AD' + BC$, suy ra $|AD' - CD'| = |AB - BC| = 2a$. Vậy cả D và D' đều nằm trên hypebol có hai tiêu điểm là A và C . Tuy nhiên vì A, D' và D thẳng hàng nên D phải trùng D' (đpcm).



Hình 5.23

5.7. Định lý Miquel

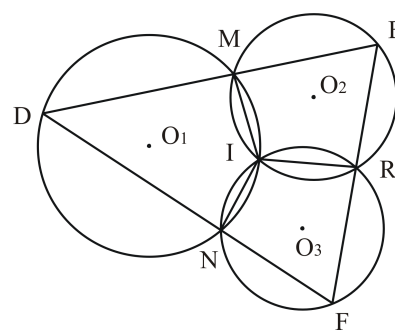
Miquel là nhà toán học Pháp, tuy nhiên các công trình của ông không đủ để được lịch sử toán lưu lại tiểu sử. Ông phát biểu và chứng minh định lý Miquel năm 1832, đăng năm 1838 trong tạp chí Journal de Mathematiques Pures et Appliquées.

Định lý 5.12. (Định lý Miquel). Giả sử ba đường tròn với tâm O_1, O_2, O_3 có một điểm chung I . Gọi $(O_1) \cap (O_2) \equiv M, (O_2) \cap (O_3) \equiv R, (O_3) \cap (O_1) \equiv N$. Dù F là điểm tùy ý trên đường tròn tâm O_3 ; giả sử FN và FR tương ứng cắt $(O_1), (O_2)$ tại D và E . Khi đó D, M, E thẳng hàng.

Chứng minh. Thật vậy, nối DM, EM , nối MI, NI, RI . Dễ thấy các góc $\widehat{F}, \widehat{D}, \widehat{E}$ lần lượt bù với các góc $\widehat{NIR}, \widehat{MIN}, \widehat{MIR}$, nên $\widehat{F} + \widehat{D} + \widehat{E} = 540^\circ - (\widehat{NIR}, \widehat{MIN}, \widehat{MIR}) = 180^\circ$.

Từ đó, FDME tạo thành một tam giác, nghĩa là D, M, E thẳng hàng.

Hệ quả 5.3. Giả sử ba đường tròn O_1, O_2, O_3 giao nhau tại một điểm I , trong đó O_1 và O_2 cắt nhau tại một điểm thứ hai là M , O_1 và O_3 cắt nhau tại một điểm thứ hai là N , O_2 và O_3 cắt nhau tại một điểm thứ hai là R . Qua M kẻ đường thẳng DME (với $D \in O_1, E \in O_2$). Khi đó DN và ER cắt nhau tại một điểm F trên O_2 .



Hình 5.24

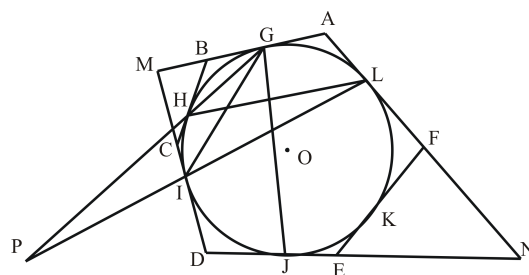
Hệ quả 5.4. Trên ba cạnh DE, DF và FE của tam giác DEF , lần lượt lấy ba điểm M, N, R . Dựng các đường tròn $(DMN), (EMR)$ và (NFR) . Khi đó ba đường tròn này sẽ có chung nhau một điểm I (I được gọi là điểm Miquel của tam giác).

5.8. Định lý Brianchon

Định lý 5.13. Các đường thẳng AB, BC, CD, DE, EF, FA tiếp xúc với một đường tròn lần lượt tại G, H, I, J, K, L (có thể không xếp theo thứ tự này). Khi đó các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Chứng minh. Gọi M là giao điểm của AB và CD , N là giao điểm của DE và FA . Áp dụng định lý Newton cho tứ giác $AMDN$, suy ra các đường thẳng AD, IL, GJ đồng quy tại điểm A_1 .

Tương tự các đường thẳng BE, HK, GJ đồng quy tại B_1 , các đường thẳng CF, HK, IL đồng quy tại C_1 . Chú ý rằng $IL \equiv A_1C_1$. Áp dụng định lý Pascal cho các điểm G, G, I, L, L, H , suy ra



Hình 5.25

các điểm A, O, P thẳng hàng, trong đó O là giao điểm của GI và LH , P là giao điểm của IL và HG . Tiếp tục áp dụng định lý Pascal cho các điểm H, H, L, I, I, G , suy ra C, O, P thẳng hàng. Do đó A, C, P thẳng hàng.

Bây giờ ta đặt G là giao điểm của AB và A_1B_1 , H là giao điểm của BC và B_1C_1 , P là giao điểm của CA và IL tức là của CA và C_1A_1 .

Áp dụng định lý Desargues (phần đảo) cho các tam giác $ABC, A_1B_1C_1$, suy ra các đường thẳng $AA_1 \equiv AD, BB_1 \equiv BE, CC_1 \equiv CF$ đồng quy.

Lưu ý rằng phần đảo của định lý Brianchon cũng đúng. Thật vậy, gọi O là giao điểm của BB_1 và CC_1 . Xét các tam giác RBB_1, QCC_1 . Vì các đường thẳng RQ, BC, B_1C_1 cắt nhau tại P , và A là giao điểm của RB với QC , O là giao điểm của BB_1 và CC_1 , A_1 là giao điểm của BR và C_1Q . Sử dụng định lý Desargues (phần thuận), ta có A, O, A_1 thẳng hàng. Do đó, các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

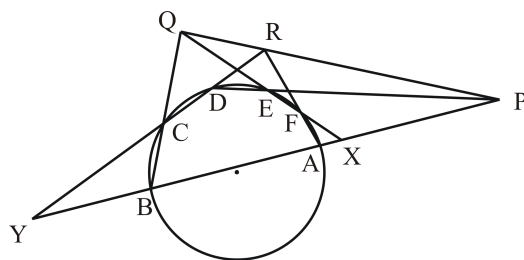
5.9. Định lý Pascal và Định lý Newton

5.9.1. Định lý Pascal

Định lý 5.14. Cho A, B, C, D, E, F là các điểm cùng nằm trên một đường tròn (có thể không xếp theo thứ tự nêu trên). Gọi P là giao điểm của AB và DE , Q là giao điểm của BC và EF , R là giao điểm của CD và FA . Khi đó các điểm P, Q, R thẳng hàng.

Chứng minh.

Gọi X là giao điểm của EF và AB , Y là giao điểm của AB và CD , Z là giao điểm của CD và EF . Áp dụng định lý Menelaus cho các đường thẳng BC, DE, FA (đối với tam giác XYZ), ta có

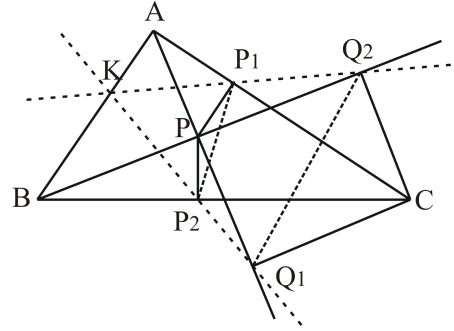


Hình 5.26

$$\frac{ZQ}{QX} \cdot \frac{XB}{BY} \cdot \frac{YC}{CZ} = -1, \quad \frac{XP}{PY} \cdot \frac{YD}{DZ} \cdot \frac{ZE}{EX} = -1, \quad \frac{YR}{RZ} \cdot \frac{ZF}{FX} \cdot \frac{XA}{AY} = -1.$$

Lời giải.

Vì các góc $\widehat{CP_1P}$, $\widehat{CP_2P}$, $\widehat{CQ_2P}$, $\widehat{CQ_1P}$ đều vuông nên các điểm C, Q, P_1, P, P_2, Q_2 nằm trên đường tròn đường kính CP . CP_1 và Q_1P cắt nhau tại A và Q_2P, CP_2 cắt nhau ở B . Áp dụng định lý Pascal cho lục giác nội tiếp $CP_1Q_2PQ_1P_2$ ta thấy rằng Q_1P_2 và P_1Q_2 cắt nhau tại điểm K nằm trên đường thẳng AB .



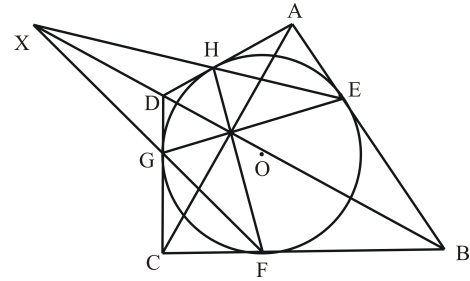
Hình 5.28

5.9.2. Định lý Newton

Định lý 5.15. Một đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$, lần lượt tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA tại các điểm E, F, G, H . Khi đó, các đường thẳng AC, EG, BD, FH đồng quy.

Chứng minh.

Gọi O là giao điểm của EG và FH , Gọi X là giao điểm của EH và FG . Vì D là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn tại G, H . Sử dụng định lý Pascal cho các điểm E, G, G, F, H, H ta suy ra các điểm O, D, X thẳng hàng. Tương tự sử dụng định lý Pascal cho các điểm E, E, H, F, F, G ta suy ra các điểm B, X, O thẳng hàng. Do đó B, O, D thẳng hàng, vì thế các đường thẳng EG, BD, FH cắt nhau tại O . Chứng minh tương tự ta cũng nhận được các đường thẳng AC, EG, FH cắt nhau tại O . Do đó, các đường thẳng AC, EG, BD, FH đồng quy tại O .



Hình 5.29

5.10. Định lý The'bault

Định lý 5.16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . D là một điểm nằm trên cạnh BC . Đường tròn tâm P tiếp xúc với 2 đoạn AD, DC

và tiếp xúc trong với (O) . Đường tròn tâm Q tiếp xúc với 2 đoạn AD, DB và tiếp xúc trong với (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó ta có P, I, Q thẳng hàng.

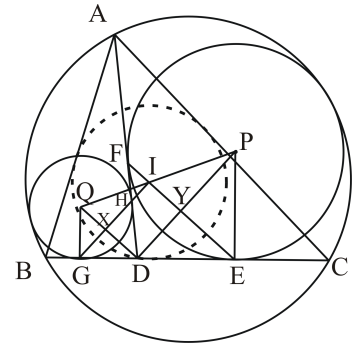
Chứng minh.

Gọi G, H lần lượt là tiếp điểm của (Q) với DB, AD . Gọi I là giao điểm của AD và BH . Theo định lý Lemoine mở rộng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Vậy ta chỉ cần chứng minh P, I, Q thẳng hàng. Thật vậy, gọi X, Y lần lượt là giao điểm của GH và $DQ; EF$ và DP .

Áp dụng định lý Thales ta có

$$\frac{IX}{PD} = \frac{YD}{PD} = \frac{QX}{QD}.$$

Vậy, P, I, Q thẳng hàng (đpcm).



Hình 5.30

Kết luận

Luận văn đã trình bày và nhận được những kết quả sau đây.

1. Trình bày một số định lý nổi tiếng áp dụng vào tam giác với chứng minh đầy đủ và tư liệu lịch sử. Đặc biệt là định lý Thales và định lý Pythagorat là hai định lý rất nổi tiếng, tuy nhiên chứng minh hay của hai định lý này lại không được giới thiệu trong các sách giáo khoa bằng Tiếng Việt nên rất nhiều người giảng dạy và nghiên cứu toán học đã không biết đến các chứng minh của các định lý này.
2. Giới thiệu nhiều định lý nổi tiếng khác của hình học và các mở rộng của chúng chưa được đưa vào các sách giáo khoa bằng tiếng Việt. Đó là định lý Ptolemy, định lý Bretschneider, định lý Ceva, định lý Menelaus, định lý Euler, định lý Simson... áp dụng vào các bài toán khó về tam giác, tứ giác, đường tròn, các đường và các điểm đặc biệt.
3. Đã khai thác một số tính chất lý thú của pedal trực tâm (5 tính chất) và của đường tròn ngoại tiếp tứ giác (10 tính chất).
4. Tuyển chọn và giới thiệu nhiều bài toán từ cơ bản đến nâng cao và khó về áp dụng các định lý hình học nổi tiếng. Nhiều bài toán trong luận văn này được lấy ra từ các đề thi học sinh giỏi hay vô địch của các nước, khu vực và quốc tế, để giải chúng cần phải biết vận dụng sáng tạo các định lý tương ứng.