BÀI TOÁN VỀ QUỸ TÍCH – TẬP HỢP ĐIỂM

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa tập hợp điểm (quỹ tích)

Một hình H được gọi là tập hợp điểm của những điểm M thoả mãn tính chất T khi nó chứa và chỉ chứa tính chất T

2. Phương pháp chủ yếu giải bài toán tập hợp điểm

Để tìm tập hợp các điểm M thoả mãn tính chất T ta làm như sau:

Bước 1: Tìm cách giải.

- Xác định các yếu tố cố định và không đổi

- Xác định các điều kiện của điểm M

- Dự đoán tập hợp điểm

Bước 2: Trình bày lời giải

- ***Phần thuận:*** *Chứng minh điểm M có tính chất T thuộc hình H*
- ***Giới hạn:****Căn cứ vào các vị trí đặc biệt của điểm M, chứng tỏ điểm M chỉ thuộc vào hình H, hoặc một phần B của hình H(nếu được)*
- ***Phần đảo:*** *Chứng minh mọi điểm thuộc hình H (quỹ tích đã được giới hạn) có tính chất T. Thường làm như sau:*

+ Lấy điểm M thuộc hình H (quỹ tích đã được giới hạn), giả sử tính chất T gồm n điều kiện.

+ Dựng một hình để chứng minh M có tính chất T sao cho M thoả mãn $n-1$ *điều kiện trong tính chất T và chứng minh M có thoả mãn điều kiện còn lại.*

- ***Kết luận:****Tập hợp điểm M là hình H. Nêu rõ hình dạng và cách xác định hình H.*

Chú ý:

- Việc tìm ra mối liên hệ giữa các yếu tố cố định, không đổi với yếu tố chuyển động là khâu chủ yếu giúp ta giải quyết bài toán tập hợp điểm.

- Nếu bài toán chỉ hỏi " Điểm M chuyển động trên đường nào? " thì ta chỉ trình bày phần thuận, phàn giới hạn và phàn kết luận mà không cần không chứng minh phần đảo.

- Giải bài toán tập hợp điểm thường là tìm cách đưa về tập hợp điểm cơ bản đã học

- Để khỏi vẽ hình lại khi chứng minh phần đảo tên các điểm trong phần đảo nên giữ nguyên như phần thuận.

3. Một số tập hợp điểm cơ bản

a) Tập hợp điểm là đường trung trực hoặc một phần đường trung trực

Định lí: *Tập hợp các điểm M cách đều hai điểm phân biệt A, B cố định là đường trung trực d của đoạn thẳng AB*

b) Tập hợp điểm là tia phân giác

Định lí: *Tập hợp các điểm nằm trong góc xOy(khác góc bẹt) và cách đều hai cạnhcủa góc là tia phân giác của góc đó.*

Hệ quả: *Tập hợp các điểm M cách đều hai đường thẳngcắt nhau xOx' và yOy' là bốn tia phân giác của bốn góc tạo thành, bốn tia này tạo thành hai đường thẳng vuông góc với nhau tại giao điểm O của hai đường thẳng đó.*

c) Tập hợp điểm là đường thẳng song song

Định lý 1: *Tập hợp các điểm M cách đường thẳng h cho trước một khoảng bằng a không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho và cách đường thẳng đó bằng a.*

Định lí 2: *Tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng song song cho trước là một đường thẳng song song và nằm cách đều hai đường thẳng đã cho.*

d) Tập hợp điểm là đường tròn, một phần của đường tròn, cung chứa góc.

+ Tập hợp các điểm M cách điểm O cho trước một khoảng không đổi r là đường tròn tâm O bán kính r.

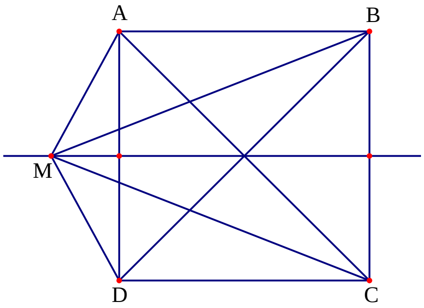
+ Tập hợp các điểm nhìn đoạn thẳng cố định AB dưới góc 90^0 là đường tròn đường kính AB.

+ Tập hợp các điểm M tạo thành với hai mút của đoạn thẳng AB cho trước một góc $\widehat{AMB}$ *có số đo không đổi là* $\alpha\left(0^0<\alpha<180^0\right)$ *là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB.*

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình vuông ABCD. Tìm tập hợp điểm M trong mặt phẳng sao cho $MA+MB=MC+MD$

Lời giải



- Phần thuận: Dựng đường thẳng d đi qua tâm O của hình vuông và d song song với AB, DC. Khi đó d là đường trung trực của AD và của BC. Ta thấy với mọi điểm M không thuộc đường thẳng d thì ta có $MA+MB\neq MC+MD$

  + $MA+MB>MC+MD$ khi điểm M nằm khác phía với điểm A so với đường thẳng d ;

  + $MA+MB<MC+MD$ khi điểm M nằm cùng phía với điểm A so với đường thẳng d.

Vậy để $MA+MB=MC+MD$ thì M thuộc đường trung trực d của AD và BC

- Giới hạn: Mọi điểm M thuộc d đều có $MA=MD$ và $MB=MC$ nên $MA+MB=MC+MD$. Vậy M thuộc đường thẳng d.

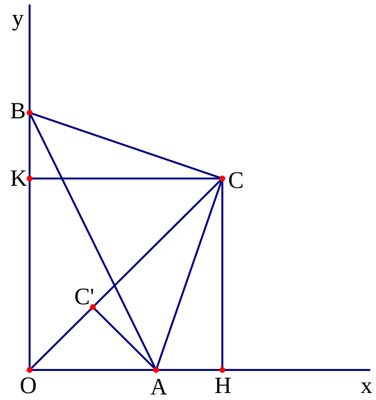
- Phần đảo: Lấy M bất kỳ thuộc đường thẳng d thì ta có $MA=MD$ và $MB=MC$. Khi đó ta có $MA+MB=MC+MD$

- Kết luận: Tập hợp điểm M cần tìm là đường trung trực của AD và BC.

Ví dụ 2. Cho một góc vuông xOy, trên tia Ox lấy điểm A cố định, B là điểm chuyển động trên tia Oy. Tìm tập hợp các điểm C sao cho Δ ABC vuông cân tại C.

Lời giải

• Phần thuận: Vẽ CH vuông góc với Ox (H thuộc Ox) và CK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Xét hai tam giác vuông CAH và CBK có $CA = CB$ và $\widehat{CAH} = \widehat{CBK}$ do đó $\Delta CAH = \Delta CBK$



Từ đó ta được $CH = CK$. Mà góc $\widehat{xOy}$ cố định nên do đó C thuộc tia phân giác Oz của góc vuông $\widehat{xOy}$.

• Giới hạn: Khi B trùng với O thì C trùng với C′, điểm C′ thuộc tia phân giác Oz và tam giác C′OA vuông cân tại C′. Khi B chạy xa O vô tận trên tia Oy thì C chạy xa O vô tận trên tia Oz. Vậy C chuyển động trên tia C′z của tia phân giác Oz của góc vuông $\widehat{xOy}$.

• Phần đảo: Lấy điểm C bất kỳ thuộc tia $C'z$. Vẽ đường thẳng vuông góc CA tại C cắt tia Oy tại B. Vẽ CH vuông góc với Ox (H thuộc Ox) và CK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Ta có $CH = CK$ và $\widehat{KHC} = 90^0$.

Xét hai tam giác vuông CAH và CBK có $CH = CK$ và $\widehat{CAH} = \widehat{CBK}$ nên $\Delta CAH = \Delta CBK$

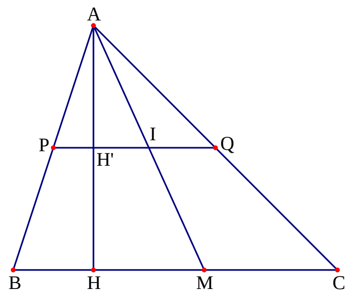
Từ đó ta được $CA = CB$ do đó tam giác ABC vuông cân tại C.

• Kết luận: Tập hợp các điểm C là tia C′z của tia phân giác Oz của góc xOy.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC và điểm M di chuyển trên cạnh BC. Tìm quỹ tích các trung điểm I của đoạn thẳng AM.

Lời giải

• Phần thuận: Kẻ đường cao AH của tam giác ABC với H thuộc BC. Từ I kẻ IK vuông góc với BC (K thuộc BC). Từ đó IK//AH.



Xét tam giác MAH có $IM = IA$ và IK//AH nên IK là đường trung bình của tam giác AMH. Do đó ta được

$IK = \frac{1}{2}AH$

Mà tam giác ABC cố định nên AH cố định, suy ra

$IK = \frac{1}{2}AH$ không đổi.

Vậy điểm I luôn cách BC một đoạn $IK = \frac{1}{2}AH$ không đổi nên I nằm trên đường thẳng song song với BC và cách BC một khoảng là $\frac{1}{2}AH$.

- Giới hạn: Vì A, I cùng nằm trong mặt phẳng bờ là đường thẳng BC nên I nằm trên đường thẳng xy // BC và cách BC một khoảng $\frac{1}{2}AH$ cùng phía đối với đường thẳng BC.

+ Khi $M \equiv B$ thì $I \equiv P$ với P là trung điểm AB.
+ Khi $M \equiv C$ thì $I \equiv Q$ với Q là trung điểm AC.
Vậy khi M chạy trên cạnh BC thì điểm I chạy trên đoạn thẳng PQ (thuộc đường thẳng xy) và PQ là đường trung bình của tam giác $ABC\left(P \in AB\, , Q \in AC\right)$

- Phần đảo: Lấy điểm I thuộc đường trung bình PQ của tam giác ABC, tia AI cắt BC ở M. Vì $I \in PQ$ nên tia AI nằm giữa 2 tia AB, AC và do vậy M thuộc đoạn.

Từ I kẻ IK vuông góc với BC. Vì I thuộc đoạn PQ nên ta được $IK = \frac{1}{2}AH$

Mặt khác ta có IK vuông góc với BC và AH vuông góc với BC nên ta được IK//AH.
Gọi H′ là giao điểm của AH và PQ.

Xét hai tam giác AIH′ và IMK có $IK = AH' = \frac{1}{2}AH$, $\widehat{H'} = \widehat{K} = 90^0$ và $\widehat{MIK} = \widehat{IAH'}$

Do đó ta được $\Delta AIH' = \Delta IMK$ nên suy ra $IA = IM$ hay I là trung điểm của AM.

- Kết luận: Vậy quỹ tích trung điểm I của đoạn AM là đường trung bình PQ của tam giác ABC với P thuộc cạnh AB, Q thuộc cạnh AC.

Ví dụ 4. Cho góc vuông $\widehat{xOy}$ cố định, điểm A cố định trên Oy, điểm B di động trên Ox. Tìm tập hợp các trung điểm M của AB.

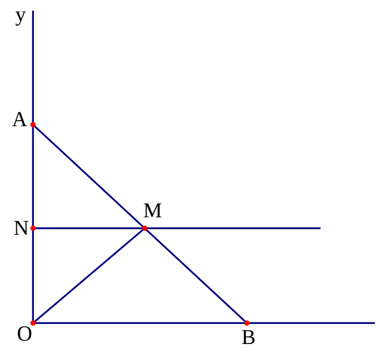
Lời giải

- Phần thuận: Ta có $OM = \frac{AB}{2}$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông AOB)

.

Mà ta có $MA = \frac{AB}{2}$, suy ra $MA = OM$ không đổi

Điểm M cách đều 2 điểm O và A cố định nên M thuộc đường trung trực của OA.



• Giới hạn: Vì AB chỉ thuộc miền trong góc $\widehat{xOy}$ nên điểm M nằm trên tia Nm thuộc đường trung trực của OA và thuộc miền trong góc $\widehat{xOy}$ (N là trung điểm của OA).

• Phần đảo: Lấy điểm M thuộc tia Mn, nối AM cắt Ox ở B, ta cần phải chứng minh M là trung điểm của AB.

Thật vậy ta có $M'A = M'O$ nên tam giác MOA cân tại M. Do đó ta được $\widehat{MAO} = \widehat{MOA}$

Mà ta có $\widehat{MOA} + \widehat{MOB} = 90^0$ và $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^0$

Từ đó suy ra $\widehat{MOB} = \widehat{MBO}$ nên tam giác MOB cân tại M. Do đó ta được $MO = MB$ nên $MA = MB$

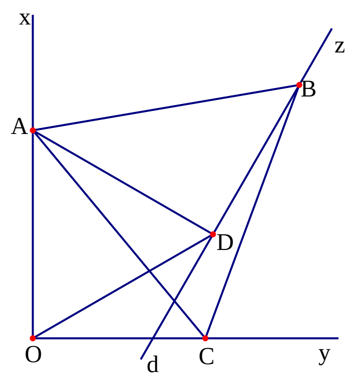
Từ đó suy ra M là trung điểm của AB.

• Kết luận: Khi B chuyển động trên Ox thì tập hợp các trung điểm M của AB là tia Nm thuộc đường trung trực của OA và thuộc miền trong góc $\widehat{xOy}$ với N là trung điểm OA.

Ví dụ 5. Cho góc vuông $\widehat{xOy}$ và một điểm A cố định nằm trên Ox(A khác O). Một điểm C di động trên cạnh Oy. Vẽ tam giác đều AMC nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Tìm quỹ tích điểm B là đỉnh của tam giác đều ABC.

Lời giải

• Phần thuận: Vẽ tam giác đều AOD nằm trong góc $\widehat{xOy}$, do điểm A, O cố định nên D cố định. Xét hai tam giác DAB và OAC có $OA = DA, AC = AB$ và $\widehat{OAC} = \widehat{DAB}$



Suy ra $\Delta DAB = \Delta OAC$ nên ta được $\widehat{ADB} = \widehat{AOC} = 90^0$ hay BD vuông góc với AD tại D. Vậy điểm B nằm trên đường thẳng d vuông góc với AD tại D.

• Giới hạn: Vì điểm C di động trên Oy nên khi C tùng với O thì B trùng với điểm D, khi điểm C chạy trên Oy thì điểm B chạy trên tia Oz thuộc đường thẳng d.

Vậy điểm B thuộc tia Oz trên đường thẳng d vuông góc với AD tại D.

- Phần đảo: Lấy điểm B thuộc tia Oz trên đường thẳng d vuông góc với AD tại D.

Qua A vẽ AC(C thuộc tia Oy) sao cho $\widehat{BAC} = 60^0$.

Khi đó ta chứng minh được $\Delta DAB = \Delta OAC$, nên suy ra $AC = AB$

Từ đó ta được tam giác ABC đều.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm B là Oz trên đường thẳng d vuông góc với AD tại D.

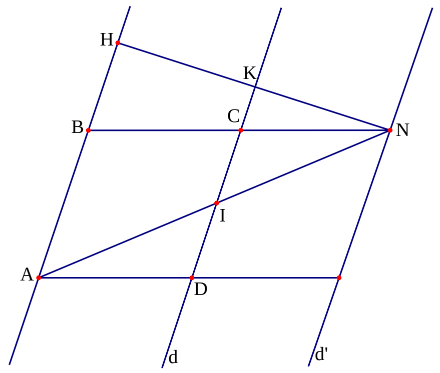
Ví dụ 6. Cho hình bình hành ABCD có cạnh AB cố định và cạnh CD chuyển động trên đường thẳng d song song với AB. Gọi I là trung điểm của CD. Tia AI cắt BC tại N. Tìm quỹ tích điểm N khi CD thă đổi trên đường thẳng d.

Lời giải

- Phần thuận: Gọi khoảng cánh giưac đường thẳng AB và đường thẳng d là h không đổi.

Xét hai tam giác IAD và INC có $\widehat{AID} = \widehat{CIN}$, $ID = IC$ và $\widehat{IDA} = \widehat{ICN}$

Do đó ta được $\Delta IAD = \Delta INC$ nên suy ra $CN = AD = BC$



Kẻ NH vuông góc với AB, NH cắt đường thẳng d tại K.

Tam giác NBH có $CB = CN$ và CK//BH nên suy ra $KH = KN$

Từ đó ta được $HN = 2KH = 2h$ không đổi.

Khi CD chuyển động trên đường thẳng d thì với mọi vị trí của CD, điểm N luôc cách đường thẳng AB một khoảng 2h không đổi.

Vậy điểm N thuộc đường thẳng d′ song song với đường thẳng AB và cách đường thẳng AB một khoảng 2h không đổi.

- Giới hạn: Khi CD di động trên đường thẳng d thì điểm N di động trên đường thẳng d′ song song với đường thẳng AB và cách đường thẳng AB một khoảng 2h không đổi.
- Phần đảo: Lấy điểm N bất kì trên đường thẳng d′. Đường thẳng AN cắt đường thẳng d tại I, đường thẳng NB cắt đường thẳng d tại C.

Lấy điểm D đối xứng với C qua điểm I. Ta cần chứng minh tứ giác ABCD là hình bình hành và I là trung điểm của CD.

Thật vậy, kẻ NH vuông góc với AB. NH cắt đường thẳng d tại K. Ta có K là trung điểm của HN. Do đó trong tam giác HNB thì C là trung điểm của NB.

Trong tam giác NAB có C là trung điểm của BN và IC//AB nên IC là đường trung bình, từ đó ta được $IC = \frac{1}{2}AB$. Vì D đối xứng với C qua I nên ta được $ID = IC = \frac{AB}{2}$.

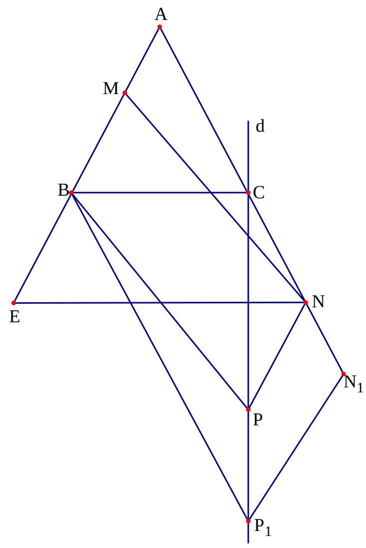
Do đó ta đường $AB = CD$, mà lại có AB//CD nên tứ giác ABCD là hình bình hành và I là trung điểm của CD.

• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm N là đường thẳng d′ song song với đường thẳng AB và cách đường thẳng AB một khoảng 2h không đổi.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại A và một điểm M di động trên cạnh AB. Lấy điểm N trên tia đối của tia CA sao cho $NC = MB$. Vẽ hình bình hành BMN. Tìm tập hợp điểm P khi M di động trên AB.

Lời giải

• Phần thuận: Tứ giác BMNP là hình bình hành nên ta được $NP = MB$ và $NC = MB$. Từ đó suy ra $NP = NC$ nên tam giác NCP cân tại N. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $EB = BM$, từ đó ta được $AE = AN$.



Do đó $\widehat{AEN} = \widehat{ABC} = \frac{180^0 - \widehat{A}}{2}$, nên suy ra NE//BC.

Từ đó ta được $\widehat{ENP} = \widehat{ENC}$, nên suy ra $NE \perp CP$, do đó ta có $CP \perp BC$

Vậy điểm P nằm trên đường thẳng d vuông góc với BC tại C.

• Giới hạn: Trên tia đối của tia CA lấy điểm N_1 sao cho $N_1C = CA$. Vẽ hình bình hành ABP_1N_1

Tương tự như trên ta suy ra điểm P_1 thuộc đường thẳng d.

Vì M di động trên đoạn thẳng AB nên khi M trùng với A thì N trùng với N_1, khi đó P trùng với P_1. Khi M trùng với B thì N trùng với C, khi đó P trùng với C.

Vậy điểm P thuộc đoạn thẳng P_1C trên đường thẳng d vuông góc với BC tại C.

• Phần đảo: Lấy điểm P bất kì trên đoạn thẳng P_1C trên đường thẳng d vuông góc với BC tại C.

Vẽ hình bình hành BMNP có M thuộc đoạn AB và N thuộc đoạn CN_1.

Ta có $NP = MB$ và NP songsong với N_1P_1 nên ta được $\widehat{NPC} = \widehat{N_1P_1C}$

Lại có $\widehat{N_1P_1C} = \widehat{N_1CP_1}$ nên suy ra $\widehat{NPC} = \widehat{NCP}$ hay tam giác NPC cân tại N.

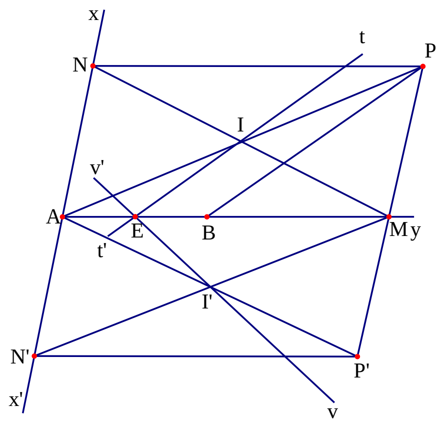
Từ đó ta được $NC = NP = BM$.

• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm P là đoạn thẳng P_1C trên đường thẳng d vuông góc với BC tại C.

Ví dụ 8. Cho hai đường thẳng xx′ và yy′ vuông góc với nhau tại A. Trên yy′ lấy điểm B(khác A) cố định. Với mỗi điểm N trên xx′ lấy M trên yy′ sao cho $BM = AN$. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi N di động trên xx′.

Lời giải

Ta xét bài toán tổng quát hơn khi $\widehat{xAy} = \alpha\left(0^0 < \alpha < 180^0\right)$.



Không mất tính tổng quát ta giả sử B thuộc tia Ay. Khi N trùng với A thì M trùng với B và điểm I trùng với trung điểm E của đoạn thẳng AB. Do đó ta chỉ cần xét N khác A là được.

+ Trường hợp 1: Khi điểm N thuộc tia Ax và điểm M thuộc tia By.

• Phần thuận: Dựng hình bình hành AMPN, khi đó ta được $BM = AN = PB$.

Từ đó suy ra $\widehat{PBM} = \widehat{BPM} = \frac{1}{2}\widehat{PMy} = \frac{\alpha}{2}$

Vì EI là đường trung bình của tam giác ABP nên ta được $\widehat{IEB} = \widehat{PBM} = \frac{\alpha}{2}$

Vậy điểm I nằm trên tia Et với gốc E và $\widehat{tEy} = \frac{\alpha}{2}$

• Phần đảo: Lấy điểm I khác E trên tia Et. Lấy điểm P đối xứng với A qua điểm I. Dựng hình bình hành AMPN sao cho N thuộc tia Ax và M thuộc tia Ay. Khi đó I là trung điểm của MN.

Hơn nữa EI là đường trung bình của tam giác ABP nên ta được $\widehat{PBy} = \widehat{tEy} = \frac{\alpha}{2}$ mà $\widehat{PMy} = \alpha$ nên M phải thuộc tia By và $BM = PM = AN$.

• Kết luận: Quỹ tích trung điểm I của đoạn MN thỏa mãn N thuộc tia Ax và M thuộc tia By sao cho $AN = MB$ là tia Et có gốc E là trung điểm của AB và $\widehat{tEy} = \frac{1}{2}\widehat{xAy} = \frac{\alpha}{2}$.

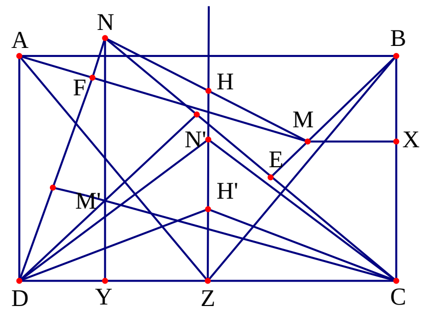
+ Trường hợp 2: Khi điểm N thuộc tia Ax′ và M thuộc tia By. Lập luận tương tự ta được quỹ tích I của đoạn MN thỏa mãn N thuộc tia Ax′ và M thuộc tia By sao cho $AN = MB$ là tia Ev có gốc E là trung điểm của AB và $\widehat{vEy} = \frac{1}{2}\widehat{xAy} = \frac{\alpha}{2}$.

+ Lập luận tương tự khi cho N chạy trên xx′ và M chạy trên yy′ với $BM = AN$ thì quỹ tích điểm I trung điểm của MN là hai đường thẳng tt′ và vv′ cắt nhau tại trung điểm E của AB và $\widehat{tEy} = \widehat{vEy} = \frac{\alpha}{2}$.

Với trường hợp $\alpha = 90^0$ thì thì quỹ tích điểm I trung điểm của MN là hai đường thẳng tt′ và vv′ vuông góc với nhau tại trung điểm E của AB.

Ví dụ 9. Lấy điểm M nằm trong hình chữ nhật ABCD cho trước. Kẻ CE vuông góc với BM tại E, kẻ DF vuông góc với AM tại F. Gọi N là giao điểm của CE và DF. Tìm quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng MN khi M di chuyển trong hình chữ nhật.

Lời giải



- Phần thuận: Gọi H là trung điểm của MN. Gọi X là hình chiếu của M trên BC. Lấy điểm M′ ở bên trong hình chữ nhật ABCD sao cho $\Delta CM'D = \Delta AMB$.

Ta có $\widehat{M'CD} = \widehat{MAB} = \widehat{ADF}$ nên ta được $CM' \perp ND$

Hoàn toàn tương tự ta được $DM' \perp CD$, từ đó suy ra M′ là trực tâm của tam giác NCD. Từ đó ta được $NM' \perp CD$ tại Y.

Do đó suy ra $\Delta BMX = \Delta M'DY$ nên ta được $MX \perp DY$ hay khoảng cách từ M đến BC bằng khoảng cách từ N đến AD.

Vậy H di chuyển trên đường trung trực của đoạn thẳng DC

- Giới hạn: Gọi trung điểm của DC là Z, gọi N′ là giao điểm của các đường vuông hạ từ C và D theo thứ tự xuống BZ, AZ. Trung điểm của ZN′ là H′. Khi đó H thuộc tia H′N′.
- Phần đảo: Lấy điểm H trên tia H′N′. Gọi E′ và F là thuộc nửa đường tròn đường kính AD và nằm trong hình chữ nhật ABCD sao cho $HE' = HF$.

Lấy điểm E đối xứng với E′ qua H′N′. Gọi M là giao điểm của AF và BE. Gọi N là giao điểm của DF và CE.

Gọi O là trung điểm của MN. Khi đó ta được $OE = OF$ với O thuộc H′N′ và $HE = HF$ với H thuộc H′N′.

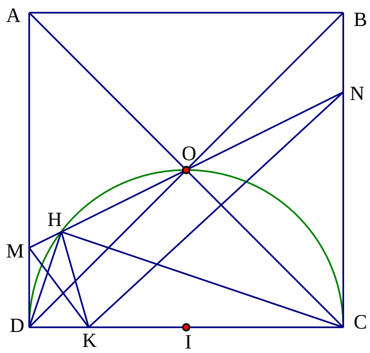
Nếu $EF \perp H'N'$ thì hai điểm E′ và F trùng nhau, điều này hông xẩy ra.

Do đó H và O trùng nhau hay H là trung điểm của MN.

• Kết luận: Vậy quỹ tích trung điểm H của MN chính là tia H′N′ thuộc đường trung trực của CD.

Ví dụ 10. Cho hình vuông ABCD có tâm O. Một đường thẳng xy quanh O cắt hai cạnh AD và BC lần lượt tại M và N. Trên CD lấy điểm K sao cho $DK = DM$. Gọi H là hình chiếu của K trên xy. Tìm quĩ tích của điểm H.

Lời giải



• Phần thuận: Ta có $CN = AM$. Vì $DK = DM$ nên.

Các tứ giác MHKD, NHKC nội tiếp đường tròn nên

$\widehat{DHK} = \widehat{DMK} = 45^0; \widehat{KHC} = \widehat{KNC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{DHC} = 90^0$

Vậy điểm H nằm trên đường tròn đường kính CD.

• Giới hạn: Điểm H chỉ nằm trên một nửa đường tròn đường kính CD nằm trong hình vuông.

• Phần đảo: Lấy điểm H bất kỳ trên nửa đường tròn đường kính CD. Vẽ đường thẳng HO cắt cạnh AB, BC lần lượt tại M và N. Lấy K trên CD sao cho DK = DM, ta phải chứng minh H là hình chiếu của K trên MN.

Thực vậy, vì $\widehat{HDC} = 90^0$; $\widehat{DOC} = 90^0$ nên tứ giác HOCD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{DCO} = 45^0$

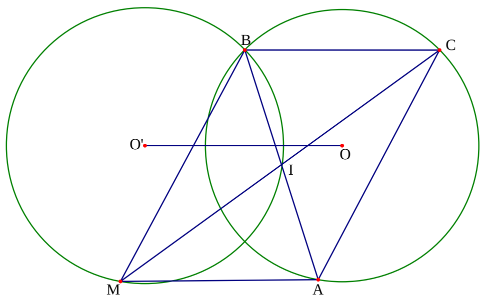
Mặt khác $\widehat{DKM} = 45^0 \Rightarrow \widehat{DHM} = \widehat{DKM} \Rightarrow$ Tứ giác HKDM nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{KHM} = 90^0 \Rightarrow KH \perp MN \Rightarrow$ H là hình chiếu của K trên MN.

• Kết luận: Vậy quĩ tích điểm H là nửa đường tròn đường kính CD, nửa đường tròn này nằm trong hình vuông.

Ví dụ 11. Cho đường tròn $(O;\, R)$ cố định. Lấy B, C là hai điểm cố định trên đường tròn và A là một điểm tuỳ ý trên đường tròn. Gọi M là điểm đối xứng của điểm C qua trung điểm I của AB. Tìm quỹ tích các điểm M.

Lời giải



• Phần thuận: Kẻ $OO'//BC$ và $OO' = BC$ (O′ và B trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC). Do đó ta được O′ cố định (vì O, B, C cố định và BC không đổi)

Tứ giác AMBC là hình bình hành (vì I là trung điểm của hai đường chéo AB và MC). Suy ra $MA // BC$ và $MA = BC$, mà ta lại có $OO'// BC$ và $OO' = BC$

Do đó ta được $MA // OO'$ và $MA = OO'$

Từ đó ta được tứ giác AMO′O là hình bình hành (dhnb)

Nên suy ra $O'M = OA = R$ không đổi và O′ cố định

Vậy khi A di động thì M di động theo nhưng M luôn cách O′ cố định một khoảng không đổi là $O'M = OA = R$. Nên M thuộc đường tròn tâm O′ bán kính $OA = R$.

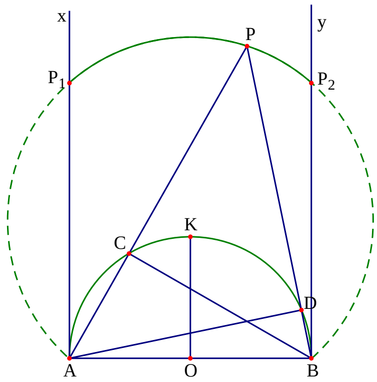
• Giới hạn: khi A di động thì M di động trên đường tròn tâm O′ bán kính $OA = R$.

• Phần đảo: Trên đường tròn (O', R) lấy điểm M bất kỳ. Nối MB. Qua C kẻ đường thẳng song song với BM cắt đường tròn (O) ở điểm thứ hai A. Ta dễ dàng chứng minh được M đối xứng với C qua trung điểm I của AB

• Kết luận: Vậy khi A di động thì M di động theo nhưng M luôn cách O′ cố định một khoảng không đổi là $O'M = OA = R$. Nên quỹ tích điểm M là đường tròn tâm O′ bán kính OA = R.

Ví dụ 12. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C, D là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho $OC \perp OD$ (C thuộc cung AD). Các tia AC và BD cắt nhau ở P. Tìm tập hợp điểm P khi C và D chuyển động trên nửa đường tròn.

Lời giải



- Phần thuận: Ta có $\widehat{ACB} = 90^0$ nên suy ra $\widehat{BCP} = 90^0$. Do đó tam giác BCP vuông. Mà $\widehat{CBP} = \frac{1}{2}\widehat{COD}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$) và $\widehat{COD} = 90^0$ (vì $OC \perp OD$)

Nên ta được $\widehat{CBP} = 45^0$. Tam giác BCP vuông cân ở C, ta có $\widehat{BPC} = 45^0$ hay $\widehat{BPA} = 45^0$

Điểm P tạo với hai mút A, B của đoạn thẳng AB cố định góc $\widehat{BPA} = 45^0$ nên P thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn AB.

- Giới hạn: Qua A và B vẽ các tia tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (O) cắt cung chứa góc nói trên tại P_1, P_2. Kẻ bán kính OK vuông góc với AB.

+ Khi C trùng với A thì D trùng với K, AC trùng với tia tiếp tuyến Ax nên P trùng với P_1.

+ Khi C trùng với K thì D trùng với B, BD trùng với tia tiếp tuyến By nên P trùng với P_2.

Vậy P chạy trên cung $\overset{\frown}{P_1P_2}$ thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn AB (hình vẽ).

- Phần đảo: Trên cung $\overset{\frown}{P_1P_2}$ nói trên, lấy điểm P bất kỳ. Nối PA, PB cắt nửa đường tròn (O) lần lượt tại C và D. Nối A với D ta có $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Do đó ta được $\widehat{ADP} = 90^0$ nên suy ra ΔADP vuông ở D

Ta có $\widehat{APB} = 45^0$ nên ta được ΔADP vuông cân ở D′

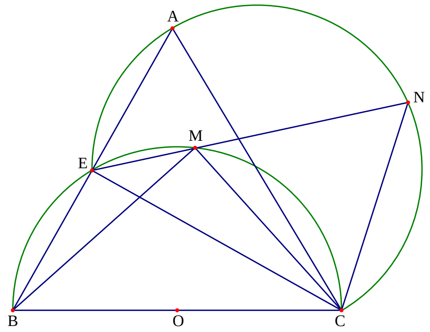
Từ đó suy ra $\widehat{PAD} = 45^0$, nên ta được $\widehat{COD} = 2\widehat{PAD} = 2.45^0 = 90^0$

Do đó OC vuông góc với OD.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm P là cung $\overset{\frown}{P_1P_2}$ thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn AB (hình vẽ).

Ví dụ 13. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính BC. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC chứa nửa đường tròn (O) vẽ tam giác đều BAC, AB cắt nửa đường tròn (O) ở E. Gọi M là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn. Vẽ tam giác đều MCN sao cho đỉnh N nằm khác phía với điểm B qua MC. Tìm quỹ tích điểm N.

Lời giải



• Phần thuận: Ta có $\widehat{BEC}=90^0 \Rightarrow CE \perp AB$. CE là đường cao của tam giác đều ABC nên CE là phân giác của góc $\widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{BCE}=30^0$. Do đó ta được $\widehat{EMB}=\widehat{ECB}=30^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung). Ta có $\widehat{BMC}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $\widehat{NMC}=60^0$ (tam giác NMC đều). Nên ta được

$$\widehat{EMB}+\widehat{BMC}+\widehat{CMN}=30^0+90^0+60^0=180^0$$

Suy ra ba điểm E, M, N thẳng hàng. Từ đó ta được $\widehat{ENC}=60^0$ và $\widehat{BCE}=30^0$ nên $sd\overset{\frown}{BE}=60^0$, điểm B cố định và đường tròn (O) cố định. Do đó điểm E cố định và C cố định nên CE cố định

Điểm N tạo với hai mút C, E của đoạn thẳng CE cố định góc $\widehat{ENC}=60^0$ nên N thuộc cung chứa góc 60^0 vẽ trên đoạn CE.

• Giới hạn: Vì M chuyển động trên nửa đường tròn (O) nên khi M trùng với B thì N trùng với A và khi M trùng với C thì N trùng với C. Vậy M chuyển động trên cung $\overset{\frown}{AC}$ thuộc cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn CE (hình vẽ).

• Phần đảo: Trên cung $\overset{\frown}{AC}$ nói trên, lấy điểm N bất kỳ. Nối NE cắt nửa đường tròn (O) ở M.

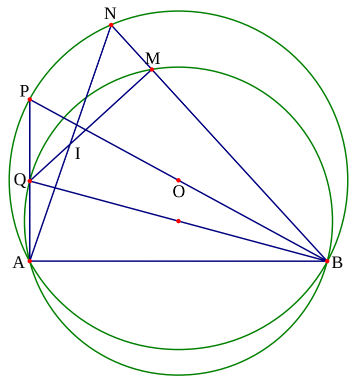
Nối C với M và C với N ta có $\widehat{ENC}=60^0 \Rightarrow \widehat{MNC}=60^0$

Ta chứng minh được $\widehat{NMC}=\widehat{EBC}=60^0$ (góc ngoài của tứ giác nội tiếp BEM’C bằng góc trong của đỉnh đối diện). Do đó ta được tam giác CMN đều.

• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm N là cung $\overset{\frown}{AC}$ thuộc cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn CE (hình vẽ).

Ví dụ 14. Cho đường tròn (O) dây cung AB cố định. Gọi N là một điểm chuyển động trên đường tròn, I là trung điểm của AN, M là hình chiếu của điểm I trên BN. Tìm tập hợp các điểm M.

Lời giải



• Phần thuận: Gọi giao điểm của BO với đường tròn (O) là P thì điểm P cố định, nên AP cố định. Gọi MI cắt AP ở Q.

Ta có NP // MQ (vì cùng vuông góc với NB)

Ta chứng minh được IQ là đường trung bình của tam giác ANP nên Q là trung điểm của AP suy ra Q cố định nên BQ cố định

Vậy điểm M tạo thành với hai mút của đoạn thẳng BQ cố định một góc $\widehat{QMB} = 90^0$, do đó M thuộc đường tròn đường kính BQ

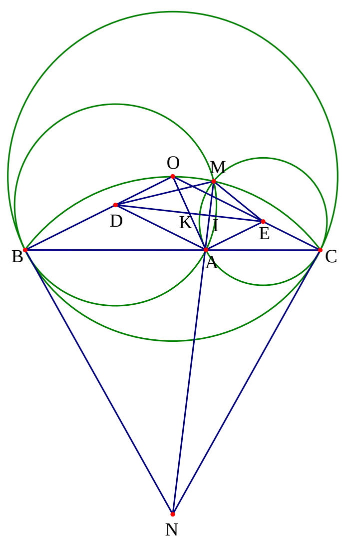
• Giới hạn: Khi điểm N là một điểm chuyển động trên đường tròn (O) thì điểm M chuyển động trên đường tròn đường kính BQ.

• Phần đảo: Lấy M thuộc đường tròn đường kính BQ. Tia BM cắt đường tròn (O) ở N. Gọi I là giao điểm của AN và MQ. Khi đó dễ dàng chứng minh được I là trung điểm của AN và M là hình chiếu của I trên BN.

• Kết luận: Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BQ.

Ví dụ 15. Cho đường tròn tròn (O; R) và dây cung BC cố định. Điểm A di động trên đoạn thẳng BC. Gọi D là tâm đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường tròn (O; R) tại B, E là tâm đường tròn đi qua A, C à tiếp xúc với đường tròn (O; R) tại C. Gọi M là giao điểm thứ hai của hai đường tròn tâm D và tâm E. Tìm quỹ tích điểm M khi A di động trên đoạn thẳng BC.

Lời giải



• Phần thuận: Do đường tròn (O) và đường tròn tâm D tiếp xúc với nhau tại D nên ba điểm O, B, D thẳng hàng. Đường tròn (O) và đường tròn tâm E tiếp xúc nhau tại C nên ba điểm O, E, C thẳng hàng.

Khi đó ta có $\widehat{DBA} = \widehat{DAB}$, $\widehat{DBA} = \widehat{ECA}$ và $\widehat{EAC} = \widehat{ECA}$ nên ta được $\widehat{DBA} = \widehat{EAC}, \widehat{DAB} = \widehat{ECA}$

Từ đó dẫn đến OB//AE và DA//OE. Suy ra tứ giác ADOE là hình bình hành. Gọi K là tâm của hình bình hành ADOE nên K là trung điểm của AO và DE. Hai đường tròn tâm E và tâm D cắt nhau tại M và A nên

MA là đường trung trực của đoạn thẳng DE. Gọi I là giao điểm của DE và AM, khi đó IK là đường trung bình của tam giác AMO, do đó KI//MO. Từ đó ta được tứ giác DOME là hình thang. Mà ta có $DM = OE$ nên hình thang DOME cân.

Do đó tứ giác DOME nội tiếp đường tròn.

Xét hai tam giác MBC và ADE có $\widehat{MBC} = \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{ADM}$ và $\widehat{MCB} = \widehat{AED} = \frac{1}{2}\widehat{AEM}$

Do đó ta được $\Delta MBC \backsim \Delta ADE$ nên suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{DAE} = \widehat{BOC}$ không đổi

Do BC cố định nên M thuộc cung chứa góc $\widehat{BOC}$ không đổi

- Giới hạn: Khi A trùng với B thì M trùng với B Khi A trùng với C thì M trùng với C. Như vậy M chuyển động trên cung chứa góc $\widehat{BOC}$.
- Phần đảo: Lấy điểm M bất lì trên cung chứa góc $\widehat{BOC}$.

Dựng đường tròn tâm D đi qua M và tiếp xúc với đường tròn (O). Đường trong tâm D cắt BC tại A.

Dựng đường tròn tâm E đi qua ba điểm M, A, C.

Ta cần chứng minh hai đường tròn tâm O và tâm E tiếp xúc với nhau tại C.

Thật vậy, từ B, C kẻ các tiếp tuyến Bx, Cy với đường tròn (O).

Khi đó ta có $\widehat{BMA} = \widehat{ABx}$ và $\widehat{ABx} = \widehat{ACy}$ nên ta được $\widehat{BMA} = \widehat{ACy}$

Từ đó suy ra Bx, Cy và AM đồng quy tai điểm N.

Do đó ta được $\widehat{ABC} = \widehat{ACy}$, suy ra CN là tiếp tuyến của đường tròn tâm E đi qua ba điểm A, M, C

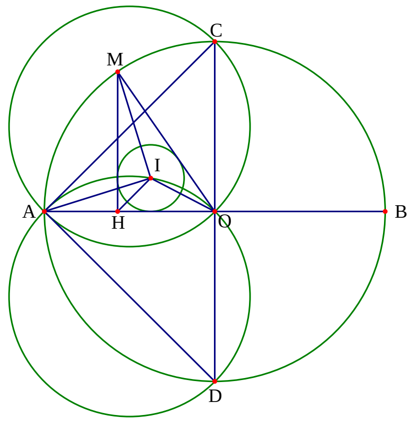
Từ đó suy ra CN là tiếp tuyến chung tại C của hai đường tròn (O) và (E).

Vậy hai đưởng tròn tâm O và tâm E tiếp xúc với nhau tai C.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm M là cung chứa góc $\widehat{BOC}$ dựng trên đoạn BC.

Ví dụ 16. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Điểm M di động trên cung $\overset{\frown}{CAD}$. Gọi H là hình chiếu của M trên AB. Gọi I là tâm đường trong nội tiếp tam giác HMO. Tìm quỹ tích điểm I khi M di động trên cung $\overset{\frown}{CAD}$.

Lời giải



- Phần thuận: Tam giác HMO có $\widehat{MHO}=90^0$ nên ta được $\widehat{HMO}+\widehat{HOM}=90^0$

Do đó ta được $\widehat{IMO}+\widehat{IOM}=\frac{1}{2}\widehat{HOM}=45^0$

Trong tam giác IMO có $\widehat{OIM}=180^0-\left(\widehat{IMO}+\widehat{IOM}\right)=135^0$

Xét hai tam giác IMO và IAO có OI chung, $\widehat{IOM}=\widehat{IOA}$ và $OM=OA=R$ nên $\Delta IMO=\Delta IAO$

Do đó ta được $\widehat{MIO}=\widehat{AIO}=135^0$, lại có OA cố định nên I thuộc cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn AO.

- Giới hạn: Khi M di động đến trùng với điểm A thì điểm I di động đến trùng với điểm A. Khi M di động đến trùng với điểm C thì điểm I di động đến trùng với điểm O. Khi M di động đến trùng với điểm D thì điểm I di động đến trùng với điểm O. Vậy điểm I di động trên hai cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng AO.

- Phần đảo: Lấy điểm I bất kì trên cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng AO. Khi đó $\widehat{OIA}=135^0$.

Vẽ tia OM với M thuộc đường tròn (O) sao cho O là tia phân giác của góc $\widehat{AOM}$

Xét hai tam giác IMO và IAO có $OM=OA=R$, $\widehat{IOM}=\widehat{IOA}$ và OI chung nên được $\Delta IMO=\Delta IAO$

Từ đó $\widehat{MIO}=\widehat{AIO}=135^0$. Trong tam giác IMO có

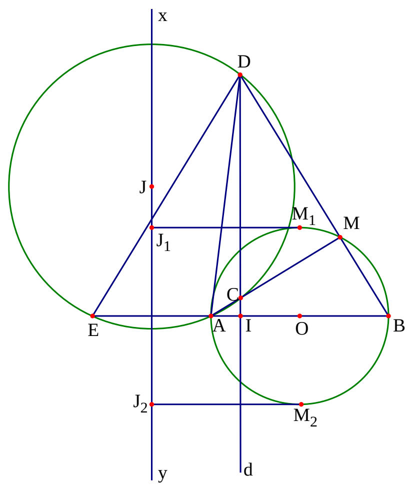
$\widehat{IMO}+\widehat{IOM}=180^0-\widehat{MIO}=180^0-135^0=45^0$

Do đó ta được $\widehat{HOM}+2\widehat{IOM}=90^0$, mà ta có $\widehat{HOM}+\widehat{HMO}=90^0$ nên ta được $\widehat{HMO}=2\widehat{IMO}$ hay MI là tia phân giác của góc $\widehat{HMO}$. Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HOM.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm I là hai cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng AO trừ hai điểm O và A.

Ví dụ 17. Cho đường tròn (O; R) và đường kính AB. Vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại I(I thuộc đoạn AB). Gọi M là điểm chuyển độn trên đường tròn (O; R).AM. BM cắt đường thẳng d lần lượt tại C và D. Tìm tập hợp các điểm J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Lời giải



- Phần thuận: Gọi E là điểm đối xứng với B qua đường thẳng d, khi đó điểm E cố định.

Ta có $\widehat{EDC} = \widehat{BDC}$ và $\widehat{AMB} = 90^0$

Lại có $\widehat{CAI} = \widehat{BDC}$ nên ta được $\widehat{EDC} = \widehat{CAI}$, do đó tứ giác EDCA nội tiếp đường tròn.

Do đó đường tròn đi qua ba điểm A, C, D đi qua hai điểm cố định A và E.

Do đó tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC thuộc đường thẳng xy cố định là đường trung trực của đoạn thẳng AE.

- Giới hạn: Khi điểm M trùng với M_1 là điểm chính giữa cung AB thì điểm J trùng với điểm J_1 và $M_1J_1 \perp OM_1$ với $J_1 \in d$.

Khi M trùng với M_2 là điểm chính giữa cung AB còn lại thì J trùng với J_2 và $M_2J_2 \perp OM_2$ với $J_2 \in d$.

Như vậy điểm J di động trên hai tia J_1x và J_2y của đường trung trực của đoạn thẳng AE.

- Phần đảo: Lấy điểm J bấy kì trên tia J_1x (trường hợp trên tia J_2y chứng minh tương tự)

Vẽ đường tròn $(J; JA)$ cắt đường thẳng d tại C, D. AC cắt BD tại M.

Ta có $JE = JA$ nên E thuộc đường tròn $(J; JA)$

Ta có $\widehat{ACI} = \widehat{DEA}$ và $\widehat{DBE} = \widehat{DEA}$ nên ta được $\widehat{ACI} = \widehat{DBE}$ nên tứ giác ICMB nôi tiếp đường tròn.

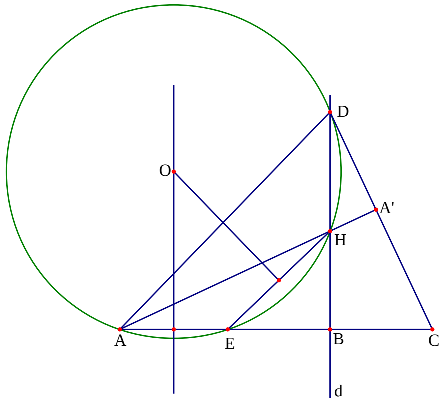
Mà ta có $\widehat{CIB} = 90^0$ nên $\widehat{BMC} = 90^0$ nên M thuộc đường tròn (O).

- Kết luận: Vậy quỹ tích tâm J của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD là hai tia J_1x và J_2y của đường trung trực của đoạn thẳng AE.

Ví dụ 18. Cho ba điểm ABC cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Trên đường thẳng d vuông góc với AB tại B lấy điểm D bất kì. Gọi H là trực tâm tam giác DAC. Tìm quỹ tích điểm O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADH.

Lời giải

• Phần thuận: Gọi giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với AC là E.



Xét hai tam giác BAH và BDC có $\widehat{ABH} = \widehat{DBC} = 90^0$ và $\widehat{BAH} = \widehat{BDC}$. Do đó ta được $\Delta BAH \backsim \Delta BDC$, suy ra

$\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BD.BH = AB.BC$ không đổi.

Xét hai tam giác BAD và BHE có $\widehat{BAD} = \widehat{BHE}$

và $\widehat{ABD}$ chung. Do đó ta được $\Delta BAD \backsim \Delta BHE$.

Suy ra $\dfrac{BA}{BH} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow BH.BD = BA.BE$

Từ đó suy ra $BA.BE = BA.BC \Rightarrow BE = BC$ không đổi

Mà E thuộc đường thẳng cố định và B cố định nên E là điểm cố định.

Ta có $OA = OE$ nên O thuộc đường thẳng cố định là đường trung trực của đoạn thẳng AE.

• Giới hạn: Khi D di động trên đường thẳng d thì O di động trên đường trung trực của đoạn thẳng AE, trừ trung điểm M của đoạn thẳng AE.

• Phần đảo: Lấy điểm O bất kì trên đường trung trực của đoạn thẳng AE(không trùng với trung điểm của AE). Vẽ đường tròn tâm O bán kính OA cắt đường thẳng d tại các điểm H, D.

Do $OA = OE$ nên E nằm trên đường tròn (O).

Xét hai tam giác BAD và BHE có $\widehat{ABD}$ chung và $\widehat{BAD} = \widehat{BHE}$ nên $\Delta BAD \backsim \Delta BHE$

Do đó ta được $\dfrac{BA}{BH} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow BA.BE = BD.BH$

Mà ta có $BE = BC$ nên ta được $BD.BH = AB.BC \Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BH}{BC}$

Xét hai tam giác BAH và BDC có $\widehat{ABH} = \widehat{DBC}$ và $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BH}{BC}$

Do đó $\Delta BAH \backsim \Delta BDC$ nên ta được $\widehat{BAH} = \widehat{BDC}$

Mà ta lại có $\widehat{DBC} + \widehat{BCD} = 90^0$ nên ta được $\widehat{BAH} + \widehat{BCD} = 90^0$

Từ đó suy ra $\widehat{AA'C} = 90^0$ hay AH vuông góc với CD

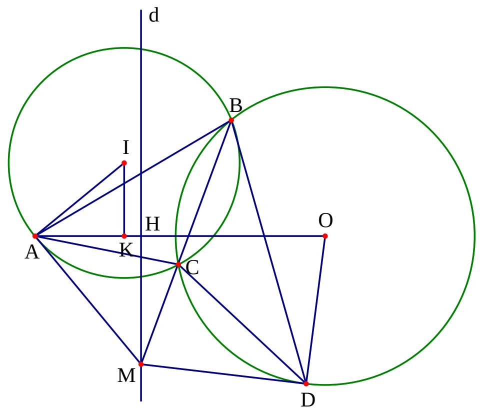
Tam giác ADC có $BD \perp AC$ và $AH \perp DC$ nên H là trực tâm của tam giác ADC.

• Kết luận: Vậy quỹ tích tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADH là đường trung trực của đoạn thẳng AE(không lấy trung điểm của AE) trong đó E là điểm đối xứng với C qua B.

Ví dụ 19. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định bên ngoài đường tròn. Đường tròn tâm I thay đổi luôn đi qua điểm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C. Gọi M là giao điểm của BC và tiếp tuyến tại A của đường tròn (I). Tìm quỹ tích điểm M khi đường tròn tâm I thay đổi.

Lời giải

- Phần thuận: Vẽ tiếp tuyến MD của đường tròn (O) với D là tiếp điểm. Gọi H là hình chiếu của M trên AO.



Xét hai tam giác MAC và MBA có $\widehat{AMC}$ chung và $\widehat{MAC} = \widehat{MBA}$ nên ta được $\Delta MAC \backsim \Delta MBA$

Từ đó suy ra $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$

Hoàn toàn tương tự ta được $MD^2 = MB.MC$

Từ đó suy ra $MA = MD$

Trong tam giác MOD vuông tại D có

$MD^2 = MO^2 - OD^2 = MO^2 - R^2$

Do đó ta được $MA^2 = MO^2 - R^2$ hay $MO^2 - MA^2 = R^2$

Trong tam giác HMA vuông tại H có $MA^2 = MH^2 + AH^2$

Trong tam giác HMO vuông tại H có $MO^2 = MH^2 + HO^2$

Do đó ta được $\left(MH^2 + HO^2\right) - \left(MH^2 + AH^2\right) = R^2 \Rightarrow OH^2 - AH^2 = R^2$

Hay ta được $\left(OH + AH\right)\left(OH - AH\right) = R^2$

Từ đó suy ra $\begin{cases} HO - AH = \dfrac{R^2}{OH + AH} = \dfrac{R^2}{OA} \\ OH + AH = OA \end{cases} \Rightarrow OH = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R^2}{OA} + OA\right)$ không đổi.

Do O cố định, AO cố định và OH không đổi nên suy ra điểm H cố định.

Lại có MH vuông góc với AO nên đường thẳng MH cố định hai M di động trên đường thẳng d vuông góc với AO tại H.

- Giới hạn: Khi điểm I thay đổi thì điểm M di động trên đường thẳng d.
- Phần đảo: Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d.

Vẽ cát tuyến MBC với đường tròn (O) với B, C thuộc đường tròn (O).

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vẽ tiếp tuyến với MD với đường tròn (O), D là tiếp điểm.

Khi đó ta có $\Delta MCD \backsim \Delta MDB$ nên ta được $\frac{MC}{MD} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MD^2 = MB.MC$

Trong tam giác MDO vuông tại D có $MD^2 = MO^2 - OD^2 = MO^2 - R^2$

Từ đó suy ra $MB.MC = MO^2 = R^2$ hay $OH^2 - AH^2 = R^2$

Do đó ta được $MB.MC = MO^2 - \left(HO^2 - AH^2\right) = \left(MO^2 - HO^2\right) + AH^2 = MH^2 + AH^2 = MA^2$

Xét hai tam giác MAC và MBA có $\widehat{AMC}$ và $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MA}$ nên $\Delta MAC \backsim \Delta MBA$

Do đó ta được $\widehat{MAC} = \widehat{MBA}$.

Vẽ IK vuông góc với AC tại K, khi đó ta có $\widehat{AIK} = \widehat{ABC}$ nên ta được $\widehat{MAC} = \widehat{AIK}$

Mặt khác trong tam giác AKI có $\widehat{AIK} + \widehat{IAK} = 90^0$ nên ta được $\widehat{MAC} = \widehat{IAK} = 90^0$

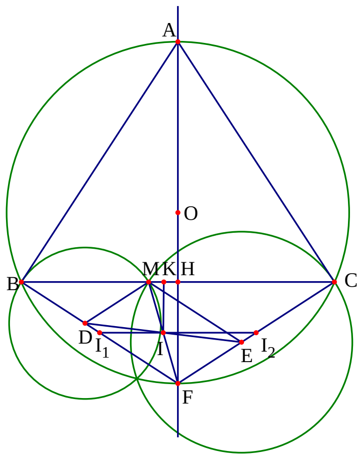
Từ đó suy ra $\widehat{IAM} = 90^0$, suy ra MA là tiếp tuyến với đường tròn (I).

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm I là đường thẳng d vuông góc với OA tại H với $OH = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{OA} + OA\right)$.

Ví dụ 20. Cho tam giác ABC cân tại A cố định nội tiếp đường tròn (O; R). Điểm M di động trên cạnh BC. Gọi D là tâm đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AB tại B, gọi E là tâm đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Tìm quỹ tích điểm I là trung điểm của DE.

Lời giải

- Phần thuận: Vẽ đường kính AF của đường tròn (O; R)



Khi đó ta được $\widehat{ABF} = \widehat{ABD} = 90^0$, do đó ba điểm B, D, F thẳng hàng. Hoàn toàn tương tự ta được ba điểm C, E, F thẳng hàng.

Tam giác ABC cân tại A nên ta được $AF \perp BC$, suy ra $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CF}$ nên ta được $\widehat{CBF} = \widehat{BCF}$

Mà ta có $BD = DM$ nên ta được $\widehat{MBD} = \widehat{BMD}$ và $EM = EC$ nên ta được $\widehat{MEC} = \widehat{CME}$

Từ đó suy ra $\widehat{MBD} = \widehat{BMD} = \widehat{MEC} = \widehat{CME}$ nên ta được BF//ME và MD//CF. Khi đó tứ giác DMEF là hình bình hành.

Mà I là trung điểm của DE nên I cũng là trung điểm của MF.

Vẽ IK vuông góc với BC tại K. Trong tam giác FMK có IK//FH và I là trung điểm của MF nên IK là đường trung bình của tam giác FMH. Do đó ta được $IK = \frac{FH}{2}$ không đổi.

Từ đó suy ra I thuộc đường thẳng d song song với BC và cách BC một đoạn không đổi $IK = \frac{FH}{2}$

• Giới hạn: Khi M trùng với B thì I trùng với I_1 là trung điểm của BF, khi M trùng với C thì I trùng với I_2 là trung điểm của CF. Vậy I di động trên đoạn I_1I_2 với

• Phần đảo: Lấy điểm I bất kì thuộc đoạn I_1I_2 với I_1 là trung điểm của BF, I_2 là trung điểm của CF.

FI cắt BC tại M, vẽ MD song song với CF với D thuộc BF và ME song song với BE với E thuộc CF. Khi đó tứ giác DMEF là hình bình hành. Mà I là trung điểm của MF nên ta được I là trung điểm của DE.

Khi đó ta được $BD = DM$ và $EM = EC$

Từ đó suy ra AB tiếp xúc với đường tròn (D) và AC tiếp xúc với đường tròn (E).

• Kết luận: Vậy quỹ tích trung điểm I của đoạn DE là đoạn I_1I_2 với I_1 là trung điểm của BF, I_2 là trung điểm của CF.

Ví dụ 21. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB cố định và đường kính CD di động. Tiếp tuyến a tại với đường tròn cắt AC và AD lần lượt tại M, N. Tìm quỹ tích điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN khi đường kính CD thay đổi.

Lời giải

• Phần thuận: Ta có $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{AD}$ và

$\widehat{DNM} = \frac{1}{2}\left(\text{sd}\overset{\frown}{AB} - \text{sd}\overset{\frown}{BD}\right) = \frac{1}{2}\left(180^0 - \text{sd}\overset{\frown}{BD}\right) = \frac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{AD}$

Do đó ta được $\widehat{ACD} = \widehat{DNM}$ nên tứ giác DCMN nội tiếp đường tròn (I).

Ta có $\widehat{DAC} = 90^0$. Trong tam giác AMN vuông tịa A có AE là đường trung tuyến.

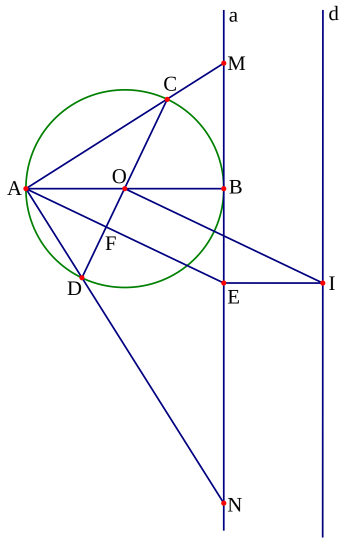
Từ đó suy ra $EA = EM$ nên ta được $\widehat{EAM} = \widehat{AME}$

Từ đó ta được $\widehat{ACF} + \widehat{FAC} = \widehat{ANM} + \widehat{AMN}$, mà ta có $\widehat{ANM} + \widehat{AMN} = 90^0$ nên $\widehat{ACF} + \widehat{FAC} = 90^0$

Do đó suy ra AE vuông góc với DC.

Điểm I là tam đường tròn đi qua các điểm DCMN nên ta được $OI \perp DC$ và $AE \perp DC$.

Từ đó suy ra AE//OI. Mặt khác ta có $OA \perp a$; $EI \perp a$ nên OA//EI.



Do đó tứ giác AEIO là hình bình hành. Nên ta được

$EI = OA = R$

Do đường thẳng a cố định nên điểm I thuộc đường thẳng d song song với đường thẳng a và cách đường thẳng a một khoảng bằng R.

- Giới hạn: Khi CD quay quanh O thì điểm E điểm E di động trên đường thẳng a, do đó điểm I di động trên đường thẳng d song song với đường thẳng a và cách a một khoảng R. Đường thẳng d nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa điểm A.

- Phần đảo: Lấy điểm I trên đường thẳng d, vẽ IE vuông góc với đường thẳng a tại E, vẽ DC vuông góc với OI tại O. Gọi giao điểm của AC, AD với đường thẳng a lần lượt là M, N

Ta có OA vuông góc với a tại B, EI vuông góc với a tại E nên OA//EI.

Mà ta có $OA = IE = R$. Do đó tứ giác AOIE là hình bình hành.

Suy ra AE//OI, mà ta có OI//DC nên ta được AE vuông góc với DC.

Chứng minh tương tự ta suy ra được tứ giác DCMN nội tiếp đường tròn.

Từ đó suy ra tam giác EAM cân tại E nên $EA = EM$, tam giác EAN cân tại E nên $EA = EN$

Do đó $EM = EN$. Nên ta được $IM = IN$, suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN.

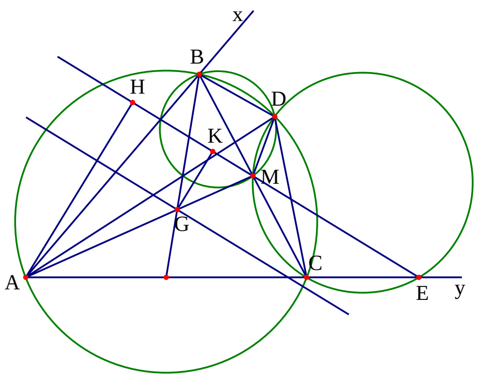
- Kết luận: Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN là đường thẳng d song song với đường thẳng a và cách a một khoảng R. Đường thẳng d nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa điểm A.

Ví dụ 22. Cho góc $\widehat{xAy} = \alpha$ không đổi và điểm B cố định nằm trong góc $\widehat{xAy}$. Đường tròn (O) di động đi qua A và B cắt Ax và Ay lần lượt tại C và D. Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ABC thuộc một đường cố định.

Lời giải

Ta có $\widehat{xAB} = \widehat{CDB}$, $\widehat{ABy} = \widehat{BCD}$ và $\widehat{DAC} + \widehat{DBC} = 180^0$

Do các góc $\widehat{xAB}; \widehat{BAy}; \widehat{DAC}$ không đổi nên các góc $\widehat{CDB}$; $\widehat{BCD}$; $\widehat{DBC}$ không đổi. Gọi M là trung điểm của BC. Ta có các góc $\widehat{BMC}$; $\widehat{BMD}$ không đổi. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC, đường tròn này cắt tia Ax tại E. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác MBD, đường tròn này cắt tia Ay tại F. Ta có tứ giác BMCE nội tiếp nên



$\widehat{BEC} + \widehat{BMC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{AEB} = 180^0 - \widehat{BMC}$

không đổi, do đó điểm E cố định.

Ta có $\widehat{BME} = \widehat{BCE} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{BE}$, $\widehat{BDF} = \widehat{BCE}$ và $\widehat{BDF} + \widehat{BMF} = 180^0$

Do đó ta được $\widehat{BME} + \widehat{BMF} = 180^0$, suy ra ba điểm E, M, F thẳng hàng.

Vẽ AH vuông góc với EF(H thuộc EF), GK vuông góc với EF(K thuộc EF), khi đó ta có AH không đổi và AH song song với GK. Đặt $AH = h$.

Trong tam giác AHM có GK//AH nên theo định lí Talets ta có $\frac{GM}{AM} = \frac{GK}{AH}$

G là trọng tâm và AM là đường trung tuyến của tam giác ACD nên ta được $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$

Do đó ta được $\frac{GK}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow GK = \frac{1}{2}h$ không đổi và EF cố định.

Vậy điểm G thuộc đường thẳng song song với EF và cách EF một khoảng bằng $\frac{1}{3}h$.

Ví dụ 23. Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm M di động trên cạnh BC. Vẽ đường thẳng MD song song với AC(D thuộc AB), vẽ đường thẳng ME song song với AB(E thuộc AC). Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Tìm quỹ tích điểm K khi M di động.

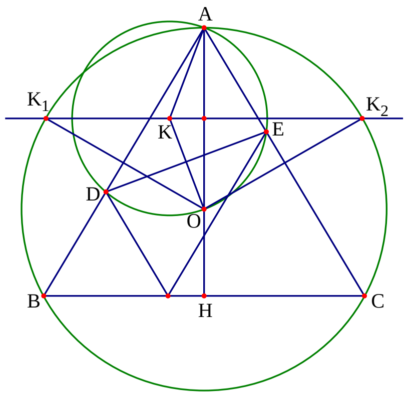
Lời giải

- Phần thuận: Gọi O là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE với đường cao AH của tam giác ABC.

Tứ giác MDAE là hình bình hành do MD//AE và AD//ME.

Từ đó ta được $MD = AE$

Do MD//AC nên ta được $\widehat{DMB} = \widehat{ACB}$, lại có



$\widehat{DBM} = \widehat{ACB}$ nên ta được $\widehat{DMB} = \widehat{DBM}$

Từ đó suy ra tam giác DBM cân nên $DM = DB$.

Do đó ta được $AE = DB$ nen

$\widehat{DAO} = \widehat{AOE} \Rightarrow \widehat{OD} = \widehat{OE} \Rightarrow OD = OE$

Xét hai tam giác OAE và OBD có $OD = OE$, $\widehat{AEO} = \widehat{ODB}$ và $AE = BD$

Do đó $\Delta OAE = \Delta OBD$ nên ta được $OA = OB$. Từ đó suy ra O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB. Mà O thuộc đường cao AH nên O thuộc đường trung trực của BC

Do đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, nên O là điểm cố định.

Ta có $KO = KA$ và AO cố định nên K thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AO

- Giới hạn: Khi điểm M trùng với điểm B thì K trùng với K_1 là giao điểm của đường trung trực của OA với đường trung trực của AB. Khi M trùng với C thì K trùng với K_2 là giao điểm của đường trung trực của OA với đường trung trực của AC. Vậy K thuộc đoạn thẳng K_1K_2 trên đường trung trực của đoạn thẳng OA.

- Phần đảo: Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng K_1K_2 trên đường trung trực của đoạn thẳng OA.

Vẽ đường tròn tâm K bán kính KA, cắt AB, AC lần lượt tại D và E.

Vẽ DM//AC(M thuộc AB). Ta cần chứng minh ME//AB.

Thật vậy, Ta có $KA = KO$ nên O thuộc đường tròn (K)

Xét hai tam giác OAE và OBD có $\widehat{OAE} = \widehat{OBD} = \widehat{OAD}$ và $\widehat{OEA} = \widehat{ODB}$

Do đó ta được $\Delta OAE \backsim \Delta OBD$ nên suy ra $\dfrac{AE}{BD} = \dfrac{OA}{OB} \Rightarrow AE = BD$

Ta có $\widehat{DBM} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{BMD} = \widehat{ACB}$ nên ta được $\widehat{DBM} = \widehat{DMB}$

Do đó tam giác DBM cân tại D nên $DM = DB$

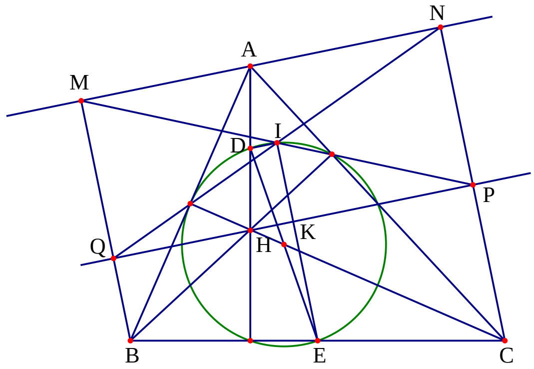
Từ đó ta được $AE = DM$, mà lại có AE//DM nên tứ giác MDAE là hình bình hành.

Do đó suy ra ME song song với AB.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm K là đoạn thẳng K_1K_2 trên đường trung trực của đoạn thẳng OA

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Hai đường thẳng song song d và d' lần lượt đi qua A và H. Các điểm M, N lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng d, các điểm P, Q lần lượt là hình chiếu của B, C trên đường thẳng d'. Giao điểm của MP và NQ là I. Tìm quỹ tích điểm I khi hai đường thẳng d và d' di động.

Lời giải



- Phần thuận: Do BM và CN cùng vuông góc với đường thẳng d nên ta được BM//CN.

Do BP và CQ cùng vuông góc với đường thẳng d′ nên ta được BP//CQ

Do hai đường thẳng d và d′ song song với nhau nên MN//PQ. Lại có $\widehat{QMN}=90^0$

Từ đó ta được tứ giác MNPQ là hình chữ nhật. Suy ra I là trung điểm của các đoạn thẳng MP và NQ.

Gọi D và E lần lượt là trung điểm của AH và BC, khi đó các điểm D, E cố định.

Tứ giác ANHQ là hình thang có DI nối trung điểm của hai đường chéo nên DI//MN

Tứ giác MPCB là hình thang có IE là đường trung bình nên IE//NC.

Ta có DI//MN, IE//NC và $\widehat{MNC}=90^0$ nên $\widehat{DIE}=90^0$

Ta có $\widehat{DIE}=90^0$ và DE cố định nên I thuộc đường tròn đường kính DE.

- Giới hạn: Khi đường thẳng d quay quanh A thì I chạy trên đường tròn đường kính DE.
- Phần đảo: Lấy điểm I bất kì trên đường tròn đường kính DE.

Qua A và H kẻ các đường thẳng d và d′ song song với DI. Gọi M, Q lần lượt là hình chiếu của B trên đường thẳng d và d′. MI cắt d′ tại P và QI cắt d tại N, PQ cắt IE tại K.

Khi đó ta có MN//DI//QP và $DA=DH$ nên ta được $IM=IP, IN=IQ$

Từ đó suy ra tứ giác MNPQ là hình bình hành. Lại có $\widehat{QMN}=90^0$ nên tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Trong tam giác PMB có $IM=IP$ và IK//MB nên ta được $KB=KP$

Trong tam giác BPC có $KB=KP$ và $EB=EC$ nên EK//CP

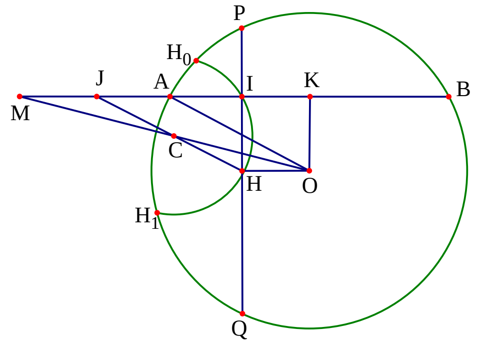
Ta có $\widehat{DIE}=90^0$ và DI//MN nên $EI\perp MN, PN\perp MN$. Từ đó suy ra ba điểm C, P, N thẳng hàng.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm I là đường tròn đường kính DE.

Ví dụ 25. Từ điểm M bên ngoài đường tròn (O; R) vẽ cát tuyến MAB với đường tròn (O). Trung trực của đoạn MB cắt đường tròn tại P và Q. Khi cát tuyến MAB quay quang M, tìm tập hợp trung điểm H của PQ.

Lời giải

• Phần thuận: Giả sử điểm A nằm giữa B và M. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của MB, MA, AB.



Khi đó rõ ràng tứ giác OHIK là hình chữ nhật, nên ta có $OH = IK = IB - KB = \frac{MB}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{MA}{2}$

.

Gọi C là trung điểm của MO, khi đó ba điểm J, C, H thẳng hàng. Ta có hai tam giác HOC và AMO đồng dạng với nhau nên $\frac{CH}{OA} = \frac{OH}{MA} = \frac{1}{2}$ hay $CH = \frac{R}{2}$.

Giả sử đường thẳng qua J vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại P′, Q′. Gọi H′ là trung điểm của P′Q′.

Khi đó lập luận tương tự ta cũng được $CH' = \frac{R}{2}$, suy ra H và H′ đều thuộc đường tròn tâm C bán kính $\frac{R}{2}$.

• Giới hạn: Vì H là trung điểm của dây PQ trong đường tròn (O) nên H chỉ nằm trên cung $\overset{\frown}{H_0H_1}$ của đường tròn $\left(C; \frac{R}{2}\right)$ và nằm trong đường tròn (O) với $H_0; H_1$ là giao điểm của hai đường tròn (O) và $\left(C; \frac{R}{2}\right)$.

• Phần đảo: Lấy điểm H bất kì thuộc cung $\overset{\frown}{H_0H_1}$ của đường tròn $\left(C; \frac{R}{2}\right)$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với OH cắt đường tròn (O) tại P và Q. Ke bán kính OA của đường tròn (O) thỏa mãn các điều kiện OH và CH nằm trên hai nửa mặt phẳng cách nhau bởi MO đồng thời $\widehat{AOM} = \widehat{HCO}$. Đường thẳng MA cắt PQ tại I cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là B.

Khi đó hiển nhiên H là trung điểm của PQ và $\Delta HCO \backsim \Delta AOM$

Từ đó ta được $OH = \frac{1}{2}MA$ và $\widehat{AMO} = \widehat{HOC}$ nên ta được MA//HO, suy ra $AM \perp PQ$ tại I.

Từ O hạ OK vuông góc với AB thì tứ giác OHIK là hình chữ nhật nên ta có

$IK = OH = \frac{MA}{2}; KB = \frac{AB}{2}$.

+ Nếu A nằm giữa M và B thì $IB = IK + KB = \frac{MA}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{MB}{2}$

+ Nếu B nằm giữa M và A thì $IB = IK - KB = \frac{MA}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{MB}{2}$

Do đó I là trung điểm của MB. Vậy PQ là đường trung trực của MB.

• Kết luận: Quỹ tích điểm H là trung điểm của PQ khi cát tuyến MAB quay quanh M là cung $\overset{\frown}{H_0H_1}$ của đường tròn $\left(C; \frac{R}{2}\right)$. Quỹ tích này chỉ tồn tại khi M không nằm ngoài đường tròn (O) bán kính 3R. Đặc biệt nếu M nằm trên đường tròn (O) này thì quỹ tích biến thành một điểm duy nhất.

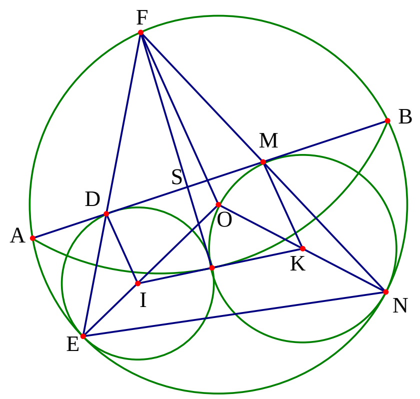
Ví dụ 26. Cho đường tròn (O; R) và một dây cung AB cách tâm O một khoảng d $(0 < d < R)$. Hai đường tròn (I) và (K) tiếp xúc với nhau tại C, cùng tiếp xúc với AB và tiếp xúc trong với đường tròn (O)(I và K nằm cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Khi hai đường tròn (I) và (K) thay đổi, tìm quỹ tích điểm C.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Ba điểm I, K, O nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AB.

• Phần thuận: Gọi tiếp điểm của (I) với AB là D, ta có $ID \perp AB$. Gọi tiếp điểm của (I) và (O) là E. Khi đó ta có ba điểm O, I, E thẳng hàng. Gọi F là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa E, ta có $OF \perp AB$.



Lại có $\frac{EI}{EO} = \frac{DI}{FO}$ nên ba điểm E, D, F thẳng hàng.

Tương tự (K) tiếp xúc với AB và (O) lần lượt tại M, N thì ta được ba điểm M, N, F thẳng hàng. Ta có

$$\widehat{FDB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DIE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{FOE} = \widehat{FNE}$$

$$\widehat{FMA} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MKN} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{FON} = \widehat{FEN}$$

Do đó ta được $\Delta FDM \backsim \Delta FNE$ nên ta suy ra $FD.FE = FM.FN$ (1)

Giả sử FC cắt đường trong (I) và (K) tại giao điểm thứ hai theo thứ tự là C_1, C_2.

Khi đó dễ dàng chứng minh được $FD.FE = FC.FC_1$; $FM.FN = FC.FC_2$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $FC_1 = FC_2$ nên suy ra $C \equiv C_1 \equiv C_2$ hay FC là tiếp tuyến chung của (I) và (K)

Hơn nữa ta lại có $FD.FE = FM.FN = FC^2$ (3)

Mặt khác do F là điểm chính giữa cung AB nên ta có $\widehat{FAD} = \widehat{FEA}$

Từ đó ta được $\Delta FAD \backsim \Delta FEA$ suy ra $FD.FE = FA^2$ (4)

Từ (3) và (4) ta được $FA = FC$, mà ta lại thấy $FA = \sqrt{2R(R-d)}$

Vậy C thuộc cung tròn AB của đường tròn $\left(F;\ FA = \sqrt{2R(R-d)}\right)$ nằm trong đường tròn (O) và không lấy hai điểm A, B.

- Phần đảo: Gọi điểm C bất kì trên cung AB nằm trong đường tròn (O) của $\left(F;\ FA = \sqrt{2R(R-d)}\right)$ và trừ hai điểm A, B. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với FC.

Gọi S là giao điểm của FC và AB. Đường phân giác của các góc $\widehat{CSA}$, $\widehat{CSB}$ cắt d lần lượt tại I và K. Khi đó hai đường tròn (I, IC) và (K, KC) tiếp xúc với nhau tại C và tiếp xúc với AB lần lượt tại D và M.

Gọi E là giao điểm thứ hai của FD với (I). Dễ dàng chứng minh được $FA^2 = FC^2 = FD.FE$.

Suy ra ta được $\dfrac{FA}{FD} = \dfrac{FE}{FA}$ nên ta được $\Delta FAD \backsim \Delta FEA \Rightarrow \widehat{FAD} = \widehat{FEA}$.

Mặt khác ta lại có $\widehat{FAD} = \dfrac{1}{2}sd\overset{\frown}{FB} = \dfrac{1}{2}sd\overset{\frown}{FA}$ nên E thuộc (O).

Vì DI//OF và lại có $\dfrac{ID}{OF} = \dfrac{IE}{OE}$ nên ta được ba điểm O, I, E thẳng hàng, do đó (I) tiếp xúc với (O) tai E.

Vậy quỹ tích điểm C khi hai đường tròn (I) và (K) thay đổi là cung tròn AB của đường tròn $\left(F;\ FA = \sqrt{2R(R-d)}\right)$ nằm trong đường tròn (O) và không lấy hai điểm A, B.

+ Trường hợp 2: Ba điểm I, K nằm khác phía với O so với AB. Khi đó ta được quỹ tích điểm C khi hai đường tròn (I) và (K) thay đổi là cung tròn AB của đường tròn $\left(F;\ FA = \sqrt{2R(R+d)}\right)$ nằm trong đường tròn (O) và không lấy hai điểm A, B.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đoạn thẳng AB cố định và điểm M chuyển động trên đoạn thẳng đó. Trên nửa mặt phẳng bờ AB vẽ tam giác đều AMN và BMP. Tìm quỹ tích điểm I là trung điểm của đoạn NP.

Bài 2. Cho hai điểm A, B cố định và một điểm M không nằm trên đường thẳng AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm M vẽ các tia Ax và By lần lượt vuông góc với AM và BN, chúng cắt nhau tại N. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

Bài 3. Cho ba điểmA, B, C theo thứ tự đó trên đường thẳng d. Vẽ các nửa đường tròn đường kính AB, AC thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng d. Một điểm H di động trên đoạn AB. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng d tại H cắt hai nửa đường tròn theo thứ tự tại D, E, Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng BD và CE. Tìm quỹ tích điểm M.

Bài 4. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định nằm bên trong đường tròn(A khác O). Qua A kẻ dây cung tùy ý cắt đường tròn (O) tại B, C. Tiếp tuyến tại B, C với đường tròn cắt nhau tại N. Tìm quỹ tích điểm N khi dây BC thay đổi.

Bài 5. Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác. Gọi K, P, Q lần lượt tà hình chiều của M trên các cạnh BC, CA, AB. Tìm quỹ tích điểm M sao cho MK, MP, MQ là đọ dài ba cạnh của một tam giác

Bài 6. Cho góc $\widehat{xAy} = 90^0$ và một điểm M nằm trong góc đó. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên tia Ax, Ay. Trên đường thẳng qua M vuông góc với HK lấy điểm P sao cho $PM = HK$. Tìm quỹ tích điểm P khi M thay đổi trong góc $\widehat{xAy}$.

Bài 7. Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Đường thẳng d vuông góc với AC tại C. D là một điểm di động trên đường thẳng d. Từ điểm B vẽ đường đường thẳng vuông góc với AD tại H(H thuộc đường thẳng AD) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD tại M và N. Tìm quỹ tích điểm M và N khi d di chuyển trên đường thẳng d.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định trên đường tròn. Trên tiếp tuyến tại A với đường trong (O) lấy điểm B cố định. Gọi đường trong (O’) là đường tròn tiếp xúc với AB tại B có bán kính thay đổi. Hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại điểm C và D. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng CD.

Bài 9. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. OBC là đường kính quay quanh O. Tìm quỹ tích điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn

$MB^2 - MC^2 = 2MA^2$

Bài 11. Cho tam giác cân ABC nội tiếp đường tròn (O; R) có $AB = AC = R\sqrt{2}$. Điểm M chuyển động trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) và đường thẳng AM cắt BC tại D. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD.

Bài 12. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định bên ngoài đường tròn (O). Một cát tuyến d bất kì đi qua điểm A cắt đường tròn (O) tại B và C. Tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O) cắt mhau tại D. Tìm quỹ tích điểm D khi cát tuyến d quay quanh điểm A.

Bài 13. Cho nửa đường tròn tâm O bán kính R và đường kính AB. Gọi C là điểm chính giữa nửa đường tròn. M là điểm chuyển động trên cung BC. Gọi giao điểm của AM với CO là N. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN. Tìm quỹ tích điểm I khi M di động.

Bài 14. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$ và điểm A cố định trên tia Ox. Đường tròn (I) di động tiếp xúc với Ox tại A và cắt tia Oy tại B, C. Tìm quỹ tích tâm K của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 15. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Bên ngoài tam giác ABC vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB, AC. Một đường thẳng d quay quanh A cắt hai nửa đường tròn theo thứ tự tại M và N(khác A). Tìm quỹ tích trung điểm của MN khi d thay đổi.

Bài 16. Cho đường tròn (O; R) với hai đường kính vuông góc AB và CD. Lấy điểm P trên đường tròn đó. Trên tia OP lấy điểm M sao cho OM bằng tổng khoảng cách từ P đến hai đường thẳng AB và CD. Tìm quỹ tích điểm M khi P di động trên đường tròn.

Bài 17. Cho tam giác ABC đều. Tìm tập hợp điểm M nằm trong tam giác sao cho nều hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F thì các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Bài 18. Cho tứ giác ABCD có $AB + CD = AD + BC$. Tìm tập hợp các điểm M nằm bên trong tứ giác ABCD sao cho tổng khoảng cách từ M đến AB và CD bằng tổng khoảng cách từ M đến AD và BC.

Bài 19. Cho đọn thẳng AB và điểm I di động trên đoạn thẳng đó. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông AICD và BIEF. Gọi O và O′ lần lượt là tâm của hai hình vuông đó. Khi M di động trên Ab thì trung điểm M của đoạn OO′ chay trên đường nào?

Bài 20. Cho hình chữ nhật ABCD và điểm M bất kì.

a) Chứng minh rằng $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

b) Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA + MC = MB + MD$

Bài 21. Cho đường tròn tâm O, bán kính r. Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d (d không cắt đường tròn O) vẽ tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm), OM cắt AB tại N.

1. Chứng minh OM.ON không đổi.

2. Khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d.

a) Tìm tập hợp tâm O′ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM.

b) Tìm tập hợp điểm N?

c) Với bài toán trên, khi khoảng cách từ tâm đường tròn (O) tới đường thẳng d bằng

$\frac{r}{2}$, quỹ tích điểm N thay đổi như thế nào?

Bài 22. Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm A cố định trên đường tròn. Điểm M di động trên tiếp tuyến d tại điểm A của (O; R). Qua M vẽ tiếp tuyến thứ hai với (O; R). Gọi B là tiếp điểm. Gọi H là trực tâm của tam giác AMB. Tìm quỹ tích điểm H.

Bài 23. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, AC là một dây cung bất kỳ, M là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AC}$. Hai đường thẳng AM và BC cắt nhau ở D. Tìm quỹ tích điểm D khi C chuyển động trên nửa đường tròn đã cho.

Bài 24. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định trên đường tròn, điểm B chuyển động trên đường tròn. Tìm quỹ tích trung điểm M của các dây AB.

Bài 25. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M trên nửa đường tròn, trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho $MN = MB$. Tìm quỹ tích các điểm N khi M chuyển động trên nửa đường tròn (O)

Bài 26. Cho nửa đường tròn đường kính AB và C là 1 điểm trên đường tròn. Trên bán kính OC lấy điểm D sao cho OD bằng khoảng cách CH từ C đến AB. Tìm quỹ tích các điểm D khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho.

Bài 27. Cho đoạn thẳng AB cố định. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA > MB$.

Bài 28. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O). Đường thẳng d quay quanh A và cắt đường tròn tại hai điểm C, D. Tìm tập hợp các điểm G là trọng tâm ta giác BCD.

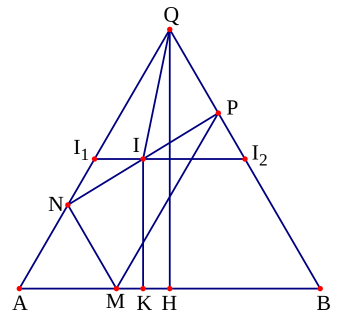
Bài 29. Hai đường tròn tâm O bán kính R và tâm O′ bán kính R′ $\left(R > R'\right)$ tiếp xúc nhau tại A. Tia Ax của góc vuông $\widehat{xAy}$ cắt đường tròn (O) tại B khác A và tia Ay cắt đường tròn (O′) tại C khác A. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Chứng minh rằng khi góc vuông $\widehat{xAy}$ quay quanh A thì H chạy trên một đường tròn.

Bài 30. Cho tam giác ABC vuông tại A. Với mỗi điểm K trên cạnh AC dựng ường tròn tâm K tiếp xúc với BC tại E. Dựng BD tiếp xúc với đường tròn tâm K tại D khác E. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AK, AD, BD, MP. Gọi S là giao điểm của đường thẳng QN và BD. Hỏi khi K di động trên cạnh AC thì điểm S di động trên đường nào.

Bài 31. Cho tam giác ABC không cân tại A nội tiếp đường tròn (O), gọi M là trung điểm của BC. Trên đường thẳng BC lấy hai điểm I, J đối xứng với nhau qua M. Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AI, AJ với đường tròn (O). Gọi H là trung điểm của EF. Tìm quỹ tích điểm H khi I và J di chuyển trên đường thẳng BC.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. • Phần thuận: Gọi giao điểm của AN với BP là Q.



Tam giác ABQ có $\widehat{QAB} = \widehat{QBA} = 60^0$ nên là tam giác đều. Mà AB cố định, do đó điểm Q cố định.

Ta có $\widehat{QAB} = \widehat{PMB} = 60^0$ nên MP//AQ và

$\widehat{QBA} = \widehat{NMA} = 60^0$ nên MN//BQ. Từ đó ta được tứ giác MNQP là hình bình hành, I là trung điểm của NP nên I cũng là trung điểm của QM. Kẻ IK vuông góc với AB tại K, QH vuông góc AB tại H, do đó IK//AH. Lại có I là trung điểm của QM nên IK là đường trung bình của tam giác MQH nên $IK = \frac{1}{2}AH$ không đổi.

Vậy I thuộc đường thẳng d song song với AB và cách AB một khoảng không đổi là $IK = \frac{1}{2}AH$.

• Giới hạn: Gọi giao điểm của đường thẳng d với AQ, BQ lần lượt là $I_1; I_2$.

Khi đó ta được II_1 và II_2 lần lượt là trung bình của tam giác AMQ và BMQ. Nên ta được I_1; I_2 lần lượt là trung điểm của AQ và BQ. Vì M chuyển động trên AB nên khi M trùng với A thì P trùng với Q và I trùng với I_1. Khi M trùng với B thì N trùng với Q và I trùng với I_2.

Vậy I di động trên đoạn thẳng I_1I_2 là đường trung bình của tam giác ABQ.

• Phần đảo: Lấy điểm I bất kì thuộc đường trung bình I_1I_2 của tam giác ABQ. Tia QI cắt AB tại M, qua M kẻ đường thẳng song song với BQ cắt AQ tại N. Đường thẳng song song với AQ cắt BQ tại P.

Khi đó ta có $\widehat{AMN} = \widehat{QBA} = 60^0$, lại có $\widehat{QAB} = 60^0$ nên ta được $\widehat{AMN} = \widehat{QAB} = 60^0$

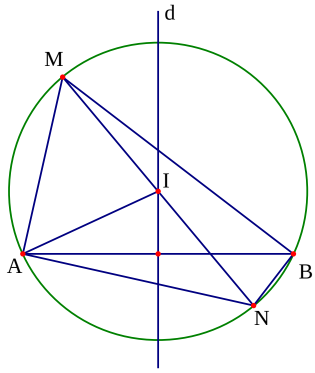
Từ đó suy ra tam giác AMN đều. Chứng minh tương tự ta được tam giác BPM đều.

Tứ giác MNQP là hình bình hành vì các cạnh đối song song với nhau.

Ta có II_1 là đường trung bình của tam giác AMQ nên I là trung điểm của MQ. Do đó I là trung điểm của NP.

• Kết luận: Vậy qũy tích điểm I là đường trung bình I_1I_2 của tam giác ABQ.

Bài 2. • Phần thuận: Xét một vị trí của điểm M ta có $Ax \perp AM$ tại A nên ta được $\widehat{MAN} = 90^0$ và $By \perp BM$ tại B nên $\widehat{MBN} = 90^0$.



Do đó ta được $\widehat{MAN} + \widehat{MBN} = 180^0$ nên tứ giác AMBN nội tiếp đường tròn đường kính MN.

Gọi I là trung điểm của MN, khi đó ta có $IA = IB$, vì A, B cố định nên điểm I chạy trên đường trung trực d cố định của đoạn thẳng AB.

• Giới hạn: Khi điểm B chuyển động thì điểm I di động trên đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

• Phần đảo: Lấy điểm I bất kì trên đường trung trực của đoạn thẳng AB. Vẽ đường tròn tâm I đi qua hai điểm A, B. Trên đường tròn tâm I lấy điểm M. Tia MI cắt đường tròn (I) tại N. Do đó I là trung điểm của MN. Khi đó dễ thấy $\widehat{MAN} = \widehat{MBN} = 90^0$.

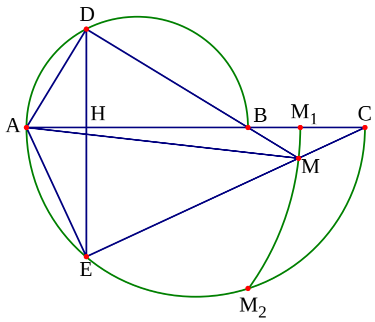
• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm I là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Bài 3. • Phần thuận: Đặt $AB = 2R_1; AC = 2R_2$, khi đó $R_1; R_2$ không đổi. Trong các tam giác vuông ADB và AEC có $AD^2 = AB.AH = 2R_1.AH$ và $AE^2 = AC.AH = 2R_2.AH$

Từ đó suy ra $AD.AE = 2AH.\sqrt{R_1.R_2}$

Tứ giác ADME nội tiếp đường tròn vì

$\widehat{ADM} + \widehat{AEM} = 180^0$



Do đó ta được $\widehat{AMD} = \widehat{AED}$ nên ta được

$\Delta DAM \backsim \Delta HAE$.

Từ đó

$\dfrac{AD}{AH} = \dfrac{AM}{AE} \Rightarrow AD.AE = AM.AH = 2AH.\sqrt{R_1.R_2}$. Do đó ta được $AM = 2\sqrt{R_1.R_2}$ không đổi.

Vậy điểm M thuộc đường tròn tâm A bán kính $AM = 2\sqrt{R_1.R_2}$.

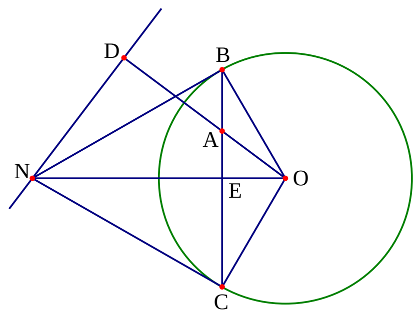
• Giới hạn: Vì H chuyển động trên AB nên khi điểm H trùng với điểm A thì điểm D, E trùng với điểm A, khi đó điểm M trùng với điểm M_1 là giao điểm của đường tròn (A) với đường thẳng d. Khi điểm H trùng với điểm B thì điểm M trùng với điểm M_2 là giao điểm của đường tròn (A) với nửa đường tròn đường kính AC. Vậy điểm M thuộc cung $\overset{\frown}{M_1M_2}$

trên đường tròn (A) với M_1 là giao điểm của đường tròn (A) với đường thẳng d và M_2 là giao điểm của đường tròn (A) với nửa đường tròn đường kính AC.

• Phần đảo: Lấy điểm M thuộc cung $\overset{\frown}{M_1M_2}$ trên đường tròn (A), các tia MB và CM cắt các đường tròn đường kính AB, AC lần lượt tại D và E. Khi đó ta chứng minh được $DE \perp AB$

• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm M là cung $\overset{\frown}{M_1M_2}$ trên đường tròn (A) với M_1 là giao điểm của đường tròn (A) với đường thẳng d và M_2 là giao điểm của đường tròn (A) với nửa đường tròn đường kính AC.

Bài 4. • Phần thuận: Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với OA tại D. Gọi giao điểm ON với BC là E, khi đó ta được OE vuông góc với BC.



Ta có $\Delta OND \backsim \Delta OAE$ nên

$$\frac{OD}{OE} = \frac{ON}{OA} \Rightarrow OD = \frac{ON.OE}{OA}$$

Tam giác OCN vuông tịa C có $CE \perp ON$ nên ta được $OE.ON = OC^2 = R^2$

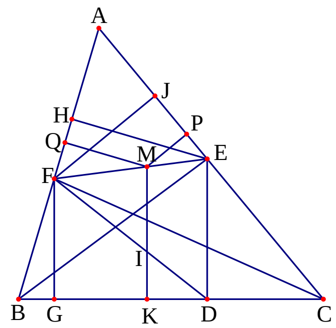
Từ đó ta được $OD = \dfrac{R^2}{OA}$ không đổi nên điểm D cố định

Vậy điểm N thuộc đường thẳng d vuông góc với OA tại điểm D cố định.

• Phần đảo: Trên đường thẳng d vuông góc với OA lấy điểm N bất kì. Qua N kẻ các tiếp tuyến NB, NC với đường tròn (O). ta cần chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng. Giả sử BC cắt OA tại A′. Chứng minh tương tự phần thuận ta được $OD = \dfrac{R^2}{OA'}$. Nhưng theo phần thuận ta được $OD = \dfrac{R^2}{OA}$, do đó ta được $OA = OA'$ nên hai điểm A và A′ trùng nhau. Tức là ba điểm A, B, C thẳng hàng.

• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm N là đường thẳng d vuông góc với OA tai D với $OD = \dfrac{R^2}{OA}$.

Bài 5. Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau: Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác. Gọi K, P, Q lần lượt tà hình chiều của M trên các cạnh BC, CA, AB. Gọi BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Khi đó nếu M nằm trên EF thì $MK = MP + MQ$.



Thật vậy, từ E kẻ ED vuông góc với BC, EH vuông góc với AB.

Do BE là phân giác của $\widehat{ABC}$ nên $ED = EH$. Mà ta có $MK \perp BC; MP \perp AC; MQ \perp AB$ nên ED//MK và EH//MQ.

Gọi I là giao điểm của MK với FD, khi đó ta có $\frac{MI}{ED} = \frac{FM}{FE}$ và $\frac{MQ}{EH} = \frac{FM}{FE}$

Nên ta được $\frac{MI}{ED} = \frac{MQ}{EH}$ suy ra $MI = MQ$. Kẻ EG vuông góc với BC và FJ vuông góc với CD, khi đó ta được $FG = FJ$. Do đó $\frac{IK}{FG} = \frac{KD}{DG} = \frac{EM}{EF}$ và $\frac{MP}{FJ} = \frac{EM}{EF}$

Từ đó ta được $IK = MP$ nên $MP + MQ = IK + IM = MK$. Vậy bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán

- Phần thuận: Gọi AD, BE, CF là ba đường phân giác của tam giác ABC.

Để MP, MK, MQ là ba cạnh của một tam giác thì ta cần có

$$MP + MQ > MK; MK + MP > MQ; MQ + MK > MP$$

Theo bổ trên thì nếu M nằm trên một cạnh của tam giác DEF thì xẩy ra một trong các đẳng thức sau

$$MP + MQ = MK; MK + MP = MQ; MQ + MK = MP$$

Khi đó MP, MK, MQ không là ba cạnh của một tam giác.

Nếu M nằm trong của một trong các tam giác AEF, BFD, CDE thì ta thu được một trong các bất đẳng thức

$$MP + MQ < MK; MK + MP < MQ; MQ + MK < MP.$$

Khi đó MP, MK, MQ không là ba cạnh của một tam giác.

Từ đó suy ra để MP, MK, MQ là ba cạnh của một tam giác thì điểm M phải nằm ở miền trong của tam giác DEF.

- Giới hạn: Để MP, MK, MQ là ba cạnh của một tam giác thì điểm M phải nằm ở miền trong của tam giác DEF.

- Phần đảo: Lấy điểm M không thuộc miền trong của tam giác DEF, chẳng hạn điểm M thuộc miền tam giác AEF, khi đó ta được $MP + MQ \leq MK$. Khi đó MP, MK, MQ không là ba cạnh của một tam giác.

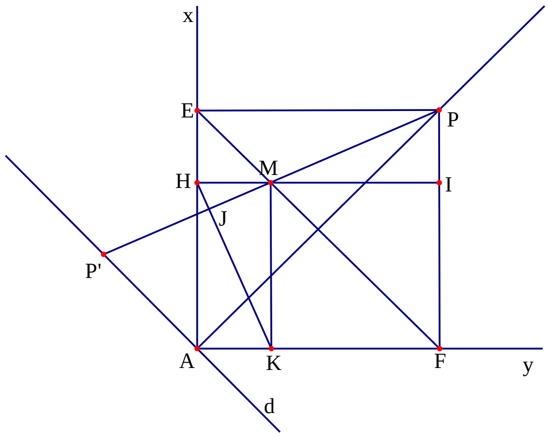
Do đó khi điểm M phải nằm ở miền trong của tam giác DEF thì MP, MK, MQ là ba cạnh của một tam giác

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm M để MP, MK, MQ là ba cạnh của một tam giác là miền tong của tam giác DEF với AD, BE, CF là ba đường phân giác của tam giác ABC.

Bài 6.

• Phần thuận: Ta xét hai trường hợp sau đây

+ Trường hợp 1: Hai điểm M và P nằm cùng phía so với HK. Khi đó điểm P nằm trong góc $\widehat{xAy}$.



Từ điểm P hạ PE vuông góc với Ay với E thuộc tia Ax và hạ PF vuông góc với Ax với F thuộc Ay.

Kéo dài HM cắt PF tại I.

Hai tam giác vuông MP và KMH có

$KH = PM$ và $\widehat{HKM} = \widehat{PMI}$ nên ta được

$\Delta MIP = \Delta KMH$

Từ đó $MI = KM = PM$ và $PI = MH = KA$

nên suy ra $PF = AF$ hay $PF = PE$

Từ đó suy ra P thuộc tia phân giác At của góc $\widehat{xAy}$.

+ Trường hợp 2: Hai điểm M và P nằm khác phía so với HK. Khi đó lấy điểm P_1 đối xứng với P qua M thì ta được $MP = MP_1 = MA$ nên tam giác APP_1 vuông tại A. Từ đó suy ra P thuộc đường thẳng d vuông góc với tia phân giác At của góc $\widehat{xAy}$

• Phần đảo: Lấy P′ trên tia phân giác của góc $\widehat{xAy}$. Hạ $P'E' \perp Ax, P'F' \perp Ay$. Lấy M′ thuộc E′F′.

Gọi K′ và H′ lần lượt là hình chiếu của M′ trên Ax, Ay. Hai đường thẳng P′M′ và H′K′ cắt nhau tại J′

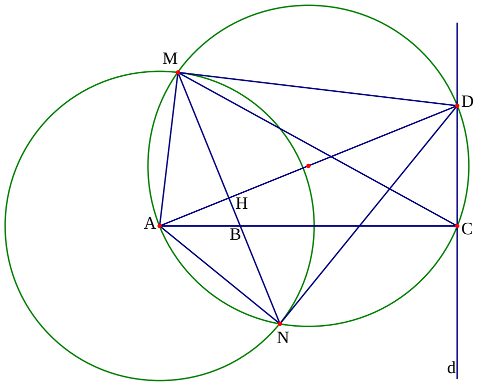
Ta cần chứng minh được $M'P' \perp H'K'$ và $M'P' = H'K'$.

Thật vậy, ta có tứ giác AE′P′F′ là hình vuông nên $M'P' = M'A = H'K'$.

Mặt khác $\Delta M'I'P' = \Delta K'M'H'$ nên $\widehat{H'K'M'} = \widehat{P'M'I'} = \widehat{H'M'J'}$.

• Kết luận: Quỹ tích điểm P khi M thay đổi trong góc $\widehat{xAy}$ là tia phân giác At của góc $\widehat{xAy}$ và đường thẳng d vuông góc với tia At tại A.

Bài 7. • Phần thuận: Ta có $\widehat{ACD}=90^0$ nên AD là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.



Từ đó suy ra $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{AN}$ và $AM=AN$

Xét hai tam giác AMB và ACM có $\widehat{AMB}$ chung và $\widehat{AMB}=\widehat{ACM}$ nên $\Delta AMB\backsim\Delta ACM$

Từ đó suy ra $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{AB}{AM}\Rightarrow AM^2=AB.AC$ hay

$AM=\sqrt{AB.AC}$ không đổi

Do đó $AM=AN=\sqrt{AB.AC}$ không đổi. Do đó M và N thuộc đường tròn cố định $\left(A;\sqrt{AB.AC}\right)$

• Giới hạn: Khi điểm D di động trên đường thẳng d thì M, N di động trên đường tròn $\left(A;\sqrt{AB.AC}\right)$.

• Phần đảo: Lấy điểm M bất kì trên đường tròn $\left(A;\sqrt{AB.AC}\right)$.

Vẽ AH vuông góc với MB tại H(H thuộc MB), AH cắt đường thẳng d tại D. Đường thẳng MH cắt đường tròn $\left(A;\sqrt{AB.AC}\right)$ tại điểm thứ hai là N. Khi đó ta có $AM=AN=\sqrt{AB.AC}$

.

Xét hai tam giác AHB và ACD có $\widehat{BAH}$ chung và $\widehat{AHB}=\widehat{ACD}=90^0$ nên $\Delta AHB\backsim\Delta ACD$

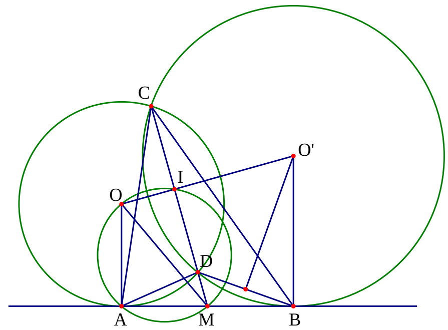
Do đó $\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AB}{AD}\Rightarrow AD.AH=AB.AC$. Từ đó suy ra $AN^2=AM^2=AH.AD$ hay $\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{AH}{AM}$

Xét hai tam giác AMH và ADM có $\widehat{MAH}$ chung và $\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{AH}{AM}$ nên $\Delta AMH\backsim\Delta ADM$

Từ đó suy ra $\widehat{AHM}=\widehat{AMD}$, mà ta có $\widehat{AHM}=90^0$ nên ta được $\widehat{AMD}=90^0$. Do đó M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD có đường kính AD. Hoàn toàn tương tự ta cũng được N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD có đường kính AD.

• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm M và N là đường tròn $\left(A;\sqrt{AB.AC}\right)$.

Bài 8. • Phần thuận: Gọi giao điểm của CD và AB là M. Xét hai tam giác MAD và MCA có $\widehat{AMD}$ chung và $\widehat{MAD} = \widehat{MCA}$ nên ta được $\Delta MAD \backsim \Delta MCA$



Do đó ta được $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$MB^2 = MC.MD$

Từ đó ta được $MA = MB$ nên là điểm cố định.

Ta có $IC = ID$ nên $OI \perp CD$, do đó ta được

$\widehat{OIM} = 90^0$ và OM cố định

Vậy điểm I di động trên đường tròn đường kính OM.

• Giới hạn: Điểm I là trung điểm của CD là dây cung của đường tròn (O) nên I nằm trong đường tròn (O).

Do dó điểm I di động trên cung tròn của đường tròn đường kính OM và nằm trong đường tròn (O).

• Phần đảo: Lấy điểm I bất kì trên cung tròn của đường tròn đường kính OM và nằm trong đường tròn (O).

Khi đó ta được $\widehat{OIM} = 90^0$ và MI cắt đường tròn (O) tại C và D.

Gọi đường tròn (O’) ngoại tiếp tam giác BCD. Do OI vuông góc với CD nên I là trung điểm của CD.

Hai tam giác MAD và MCA có $\widehat{AMD}$ chung và $\widehat{MAD} = \widehat{MCD}$ nên ta được $\Delta MAD \backsim \Delta MCD$

Do đó ta được $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA}$, mà ta có $MA = MB$ nên ta được $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MD}{MB}$

Hai tam giác MDB và MBC có $\widehat{BMC}$ chung và $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MD}{MB}$ nên ta được $\Delta MDB \backsim \Delta MBC$

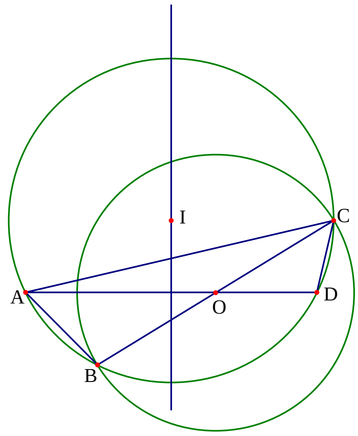
Từ đó ta được $\widehat{MBD} = \widehat{MCB}$.

Vẽ O’H vuông góc với BD, ta có $\widehat{HO'B} = \widehat{MCB}$ nên ta được $\widehat{MBD} = \widehat{HO'B}$

Từ đó ta được $\widehat{MBD} + \widehat{HBO'} = \widehat{HO'B} + \widehat{HBO'} = 90^0 \Rightarrow O'B \perp AB$ nên AB là tiếp tuyến của đường tròn (O’).

• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm I là cung tròn của đường tròn đường kính OM và nằm trong đường tròn (O).

Bài 9.



• Phần thuận: Gọi D là giao điểm của AO với đường tròn (I)(A khác D). Hai tam giác OAB và OCD có $\widehat{OAB}=\widehat{OCD}$ và $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$ do đó $\Delta OAB \backsim \Delta OCD$

Do đó ta được $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}\Rightarrow OA.OD=OB.OD$

Nên ta được $OA.OD=R^2\Rightarrow OD=\dfrac{R^2}{OA}$ không đổi nên D là điểm cố định.

Như vậy điểm I thay đổi và luôn có $IA=ID$ với A, D cố định, nên điểm I chạy trên đường trung trực của đoạn thẳng AD.

• Giới hạn: Khi đường kính BOC đi qua điểm A thì điểm I di động đến trung điểm của đoạn thẳng AD. Khi BOC không đi qua điểm D thì điểm I di động trên đường trung trực của đoạn thẳng AD.

Vậy điểm I di động trên đường trng trực của đoạn thẳng AD trừ trung điểm của đoạn thẳng AD.

• Phần đảo: Lấy điểm I bất kì thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AD, điểm I không trùng với trung điểm của đoạn thẳng AD.

Vẽ đường tròn tâm I bán kính AI cắt đường tròn (O) tại B, BO cắt đường tròn (I; IA) tai C.

Ta có $IA=ID$ nên D thuộc đường tròn tâm I bán kính IA.

Ta có $\Delta OAB \backsim \Delta OCD$ nên $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OC}{OD}\Rightarrow OC=\dfrac{OA.OD}{OB}=\dfrac{OA.\dfrac{R^2}{OA}}{R}=R$

Do đó C thuộc đường tròn (O).

• Kết luận: Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường trung trực của đoạn thẳng AD, không lấy trung điểm của AD. Với D là điểm cố định thuộc tia đối của tia OA và $OD=\dfrac{R^2}{OA}$.

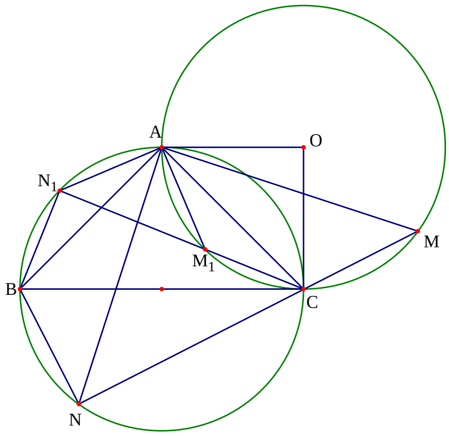
Bài 10.

• Phần thuận:

+ Nếu điểm M trùng với điểm A hoặc điểm C thì hiển nhiên ta có $MB^2-MC^2=2MA^2$

+ Nếu điểm M khác điểm A và điểm C và thỏa mãn giả thiết.

Khi đó lấy điểm N sao cho $\Delta ABN = \Delta ACM$ nên ta được $\widehat{MAN} = 90^0$. Ta có tam giác AMN vuông cân tại A nên $\widehat{ANM} = 45^0$.



Mặt khác ta có

$MN^2 + NB^2 = 2MA^2 + MC^2 = MB^2$

Từ đó ta được tam giác MNB vuông tại N.

Từ đó ta được $\widehat{ANB} = 45^0$ (khi điểm M nằm khác phía với M so với AC) hoặc $\widehat{ANB} = 135^0$ (với trường hợp ngược lại, như điểm M_1, N_1) .Từ đó N nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó suy ra $\widehat{AMC} = 45^0$ hoặc $\widehat{AMC} = 135^0$ với hai trường hợp như trên.

Điều này có nghĩa là M thuộc đường tròn tâm O bán kính OC với tam giác OAC vuồn cân tại O.

- Phần đảo:

+ Nếu điểm M trùng với điểm A hoặc điểm C thì hiển nhiên ta có $MB^2 - MC^2 = 2MA^2$

+ Lấy điểm M trên đường tròn O bán kính OC sao cho M không trùng với A và C. Gọi giao điểm của MC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là N khác C.

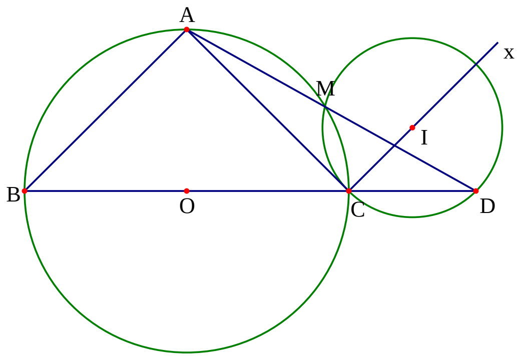
Khi đó ta được $\widehat{ANM} = \widehat{AMN} = 45^0$ nên tam giác AMN vuông cân tại A.

Từ đó suy ra $\widehat{NAB} = \widehat{MAC}, MA = NA$ mà ta có $AB = AC$ nên $\Delta ABN = \Delta ACM$. Vậy tam giác BNM vuông tại N. Từ đó ta được $2MA^2 + MC^2 = MN^2 + NB^2 = MB^2$

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm O là đỉnh của tam giác vuông cân OAC dựng bên ngoài tam giác ABC, với bán kính đường tròn là OC.

Bài 11.

- Phần thuận: Do $AB = AC = R\sqrt{2}$ và AB, AC là hai dây cung của đường tròn (O) nên AB, AC là hai cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn (O). Do đó tam giác ABC vuông cân tại A.



Từ đó suy ra BC là đường kính của đường tròn (O).

Ta có $\widehat{CID} = 2\widehat{CMD} = 90^0$ nên $\widehat{CMD} = 45^0$ là góc nhọn. Từ đó ta được

$\widehat{CMD} = \frac{1}{2}\widehat{CID} \Rightarrow \widehat{CID} = 90^0$

Tam giác CID có $CI = ID$ và $\widehat{CID} = 90^0$ nên

vuông cân tại I. Từ đó suy ra

$\widehat{ICD} = \widehat{IDC} = 45^0$

Ngoài ra ta có $\widehat{ACB} = 45^0$ nên $\widehat{ACI} = 90^0$. Ta có $\widehat{ACI} = 90^0$ và AC cố định nên I thuộc tia Cx vuông góc với AC tại C.

• Giới hạn: Khi M trùng với C thì C trùng với I. Khi M di chuyển lại gần với điểm A thì di chuyển ra xa điểm C trên ia Cx. Vậy I chuyển động trên tia Cx vuông góc với CA tại C.

• Phần đảo: Lấy điểm I bất kì thuộc tia Cx. Vẽ đường tròn tâm I bán kính IC, đường tròn này cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại M khác C, D.

Tứ giác BAMC nội tiếp đường tròn nên $\widehat{ABC} + \widehat{AMC} = 180^0$, do đó $\widehat{AMC} = 135^0$

Tam giác ICD có $IC = ID$ nên ta được $\widehat{IDC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{CID} = 90^0$

Từ đó $\widehat{CMD} = \frac{1}{2}\widehat{CID} = 45^0$. Do đó ta được $\widehat{AMC} + \widehat{CMD} = 135^0 + 45^0 = 180^0$ nên ba điểm A, M, D thẳng hàng.

• Kết luận: Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD là tia Cx vuông góc với AC tại C.

Bài 12. Bạn đọc tự vẽ hình

• Phần thuận: Gọi M là giao điểm của OD và BC. Qua D vẽ đường thẳng m vuông góc với AO tại H.

Khi đó ta được $DC = CB$ và $OB = OC = R$

Suy ra OD là đường trung trực của BC. Nên ta được OD vuông góc với BC.

Xét hai tam giác OMA và OHD có $\widehat{MOA}$ chung và $\widehat{OMA} = \widehat{OHD}$

Nên ta được $\Delta OMA \backsim \Delta OHD$, suy ra $\frac{OA}{OD} = \frac{OM}{OA} \Rightarrow OA.OH = OM.OD$

Trong tam giác OBD có $\hat{B} = 90^0$ và BM là đường có nên $OM.OD = OB^2 = R^2$

Từ đó suy ra $OA.OH = R^2$ hay $OH = \frac{R^2}{OA}$ không đổi.

Do OA cố định, O cố định nên H cố định. Suy ra đường thẳng m cố định.

Do đó D thuộc đường thẳng m cố định vuông góc với OA tại H

• Giới hạn: Do D nằm ngoài đường tròn (O; R), nên điểm D đi chuyển trên đường thẳng m trừ đoạn D_1D_2 với D_1; D_2 là giao điểm của đường thẳng m với đường tròn (O)

• Phần đảo: Lấy điểm D nằm ngoài đường tròn O và trên đường thẳng m.

Vẽ đường thẳng d qua A và và vuông góc với OD tại M và cắt đường tròn (O) tại B và C.

Xét hai tam giác OMA và OHD có $\widehat{MOA}$ chung và $\widehat{OMA} = \widehat{OHD}$ nên ta được

$\Delta OMA \backsim \Delta OHD$

Do đó ta được $\frac{OA}{OD} = \frac{OM}{OH} \Rightarrow OA.OH = OM.OD$

Mà ta có $OA.OH = R^2$ nên ta được $OM.OD = R^2 = OB^2 \Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{OB}{OD}$.

Xét hai tam giác OMB và OBD có $\widehat{MOB}$ chung và $\frac{OM}{OB} = \frac{OB}{OD}$ nên ta được

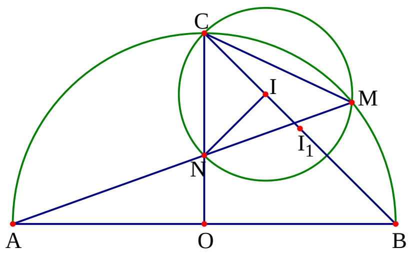
$\Delta OMB \backsim \Delta OBD$

Do đó ta được $\widehat{OMB} = \widehat{OBD} = 90^0$ nên DB là tiếp tuyến của đường tròn (O) tai B.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được DC cũng là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C.

• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm D là đường thẳng m, trừ đoạn trừ đoạn D_1D_2 với D_1; D_2 là giao điểm của đường thẳng m với đường tròn (O), vuông góc với AO tại H với $OH = \frac{R^2}{OA}$ không đổi.

Bài 13.



• Phần thuận: Ta có $\widehat{CMN} = \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AC} = 45^0$ và $\widehat{CMN}$ là góc nhọn nên ta được $\widehat{CMN} = \frac{1}{2}\widehat{CIN}$.

Do đó $\widehat{CIN} = 90^0$.

Tam giác CIN có $IC = IN$ và $\widehat{CIN} = 90^0$ nên tam giác CIN vuông cân, suy ra $\widehat{NCI} = 45^0$

Mà ta có $\widehat{NCB} = 45^0$ nên ba điểm C, I, B thẳng hàng.

Do đó I thuộc đường thẳng CB

• Giới hạn: Khi M trùng với B thì điểm I trùng với I_1 là trung điểm của BC. Khi M trùng với C thì I trùng với điểm C. Do đó I di chuyển trên đoạn CI_1 với I_1 là trung điểm của BC.

• Phần đảo: Lấy điểm I bất kì trên đoạn CI_1 với I_1 là trung điểm của BC.

Vẽ đường tròn tâm I bán kính IC. Đường tròn này cắt OC tại N. Đường thẳng AN cắt đường tròn (I) tại M khác N. Khi đó ta có $IC = IN$ nên tam giác CIN vuông tại I.

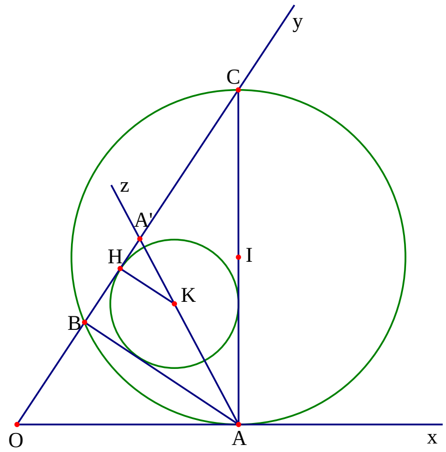
Mà ta có $\widehat{NCI} = 45^0$ nên ta được $\widehat{CNI} = 45^0 \Rightarrow \widehat{CIN} = 90^0$

Do đó ta được $\widehat{CMN} = \frac{1}{2}\widehat{CIN} = 45^0$, điều này dẫn đến $\widehat{CMN} = \widehat{CBA} = 45^0$

Do đó tứ giác ACMB nội tiếp đường tròn hay M thuộc nửa đường tròn (O).

• Kết luận: Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN là CI_1 với I_1 là trung điểm của BC.

Bài 14.



• Phần thuận: Ta có $\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ và

$\widehat{OAB} = \widehat{OCA}$ do đó ta được

$$\widehat{OAK} = \widehat{OAB} + \widehat{BAK} = \frac{1}{2}\left(\widehat{OAB} + \widehat{OCA}\right) + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$
$$= \frac{1}{2}\widehat{OCA} + \frac{1}{2}\widehat{OAC} = \frac{1}{2}\widehat{OCA} + \frac{1}{2}\left(\widehat{OAB} + \widehat{BAC}\right)$$
$$= 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{xOy}$$

Do đó $\widehat{OAK}$ không đổi. Lại có OA cố định nên K thuộc tia Az sao cho $\widehat{OAz} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{xOy}$.

• Giới hạn: Do K nằm trong góc $\widehat{xOy}$ nên K thuộc đoạn thẳng AA′ với A′ là giao điểm của tia Az với tia Oy.

• Phần đảo: Lấy điểm K bất kì trên đoạn AA′. Vẽ KH vuông góc với Oy(H thuộc Oy), vẽ đường tròn tâm K bán kính KH. Từ A vẽ các tiếp tuyến với đường tròn (K) cắt Oy lần lượt tại B và C.

Ta cần chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với tia Ox tại A.

Thật vậy, ta có $\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ và

$$\widehat{OAK} = \widehat{OAz} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{xOy} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \frac{1}{2}\widehat{OCA} + \frac{1}{2}\widehat{OAC}$$
$$= \frac{1}{2}\widehat{OCA} + \frac{1}{2}\left(\widehat{OAB} + \widehat{ABC}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{OCA} + \widehat{OAB}\right) + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

Mà ta có $\widehat{OAK} = \widehat{OAB} + \widehat{BAK} = \widehat{OAB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Do đó ta được $\widehat{OAB} = \widehat{OCA}$

Vẽ tia Am là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Khi đó ta có $\widehat{mAB} = \widehat{OCA} = \frac{1}{2}\text{sd}\,\overset{\frown}{AB}$

Từ đó ta được $\widehat{OAB} = \widehat{mAB}$ nên hai tia AO và Am trùng nhau. Vậy AO là tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

• Kết luận: Vậy quỹ tích tâm K của đường tròn nội tiếp tam giác ABC là đoạn thẳng AA′ với điểm A′ thuộc tia Az sao cho $\widehat{OAz} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{xOy}$.

Bài 15. Bạn đọc tự vẽ hình

- Phần thuận: Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^0$ nên tứ giác BCNM là hình thang vuông.

Gọi O là trung điểm của BC, do đó O cố định. Gọi K là trung điểm của MN.

Khi đó ta đường OK là đường trung bình của hình thang BCNM. Do đó ta được OK//BM.

Mà ta lại có $\widehat{AMB} = 90^0$ nên ta được $\widehat{AKO} = 90^0$. Do OA cố định nên K thuộc đường tròn đường kính OA.

- Giới hạn: Gọi d_1 là tiếp tuyến tại A với đường trong đường kính AB, d_2 là tiếp tuyến tại A với đường đường tròn đường kính AC.

Khi d trùng với d_1 thì điểm K trùng với K_1 là giao điểm của d_1 với đường tròn đường kính AO.

Khi d trùng với d_2 thì điểm K trùng với K_2 là giao điểm của d_2 với đường tròn đường kính AO.

Vậy điểm K di động trên cung $\overset{\frown}{K_1K_2}$ của đường tròn đường kính OA.

- Phần đảo: Lấy điểm K bất kì trên cung $\overset{\frown}{K_1K_2}$ của đường tròn đường kính OA

Khi đó ta được $\widehat{AKO} = 90^0$.

Đường thẳng AK cắt các nửa đường tròn đường kính AB, AC lần lượt tại M, N.

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^0$ nên tứ giác BCNM là hình thang vuông.

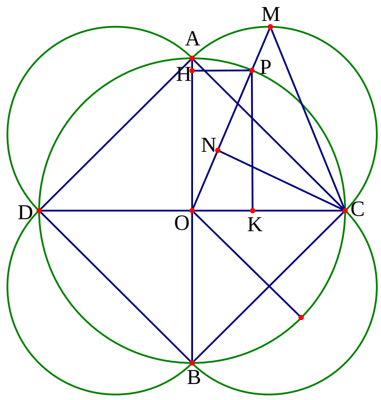
Mà ta có OK vuông góc với MN nên OK //AM

Lại có O là trung điểm của BC nên OK là đường trung của hình thang BCNM.

Do đó ta được K là trung điểm của MN.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm K là cung $\overset{\frown}{K_1K_2}$ của đường tròn đường kính OA.

Bài 16.



Giả sử điểm P thuộc cung nhỏ AC của đường tròn (O). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của P trên AB và AC. Gọi N là hình chiếu của C trên OP. Khi đó dễ thấy $ON = OK = PH; CN = PK$

- Phần thuận: Nếu điểm M trên tia OP thỏa mãn $OM = PH + KP = PH + HO > PO$ thì điểm M nằm ngoài đường tròn (O).

Lại có $MN = OM - ON = PH + PK - ON = ON + CN - ON = CN$.

Từ đó suy ra tam giác NCM vuông cân tại N, nên ta được $\widehat{OMC}=45^0$, suy ra $\widehat{OMC}=\widehat{OAC}$

Do đó tứ giác AOCM nội tiếp được, nên ta được $\widehat{AMC}+\widehat{AOC}=180^0$, suy ra $\widehat{AMC}=90^0$.

Vậy điểm M thuộc nửa đườn tròn đường kính AC nằm ngoài đường tròn (O; R).

Lập luận tương tự ta được khi P chạy trên đường tròn (O; R) thì M chạy trên các nửa đường tròn đường kính AC, BC, BD, DA nằm ngoài đường tròn (O).

- Phần đảo: Giả sử điểm M nằm trên các nửa đường tròn nói trên. Không mất tính tổng quát ta coi M nằm trên nửa đường tròn đường kính AC nằm ngoài đường tròn (O). Tia OM cắt cung nhỏ AC tại P. Xác định các điểm H, K, N như trên.

Từ $\widehat{OMC}=\widehat{OAC}=45^0$ suy ra tam giác NCM vuông cân tại N nên $MN=CN$.

Vậy ta được $OM=ON+MN=PH+CN=PH+PK$

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm M thỏa mãn đề ra là các nửa đường tròn đường kính AC, BC, BD, DA nằm ngoài đường tròn (O; R).

Bài 17. Bạn đọc tự vẽ hình

- Phần thuận: Đặt $AB=BC=CA=1$(đvdd), $AF=x, BD=y, CE=z$ với $0<x,y,z<1$.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2 &= AM^2-MF^2+BM^2-MD^2+CM^2-ME^2\\ &= BM^2-MF^2+CM^2-MD^2+AM^2-ME^2=(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2\end{aligned}$$

Từ đó ta được $x+y+z=\frac{3}{2}$. Khi AD, BE, CF đồng quy tại P, thì theo định lí Ceva ta được

$$\frac{x}{1-x}.\frac{y}{1-y}.\frac{z}{1-z}=\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}.\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}.\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}=1$$

Do đó ta được $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$, kết hợp với $x+y+z=\frac{3}{2}$ ta được

$8xyz+2=4(xy+yz+zx)$ hay $(1-2x)(1-2y)(1-2z)=0$

Từ đó suy ra ta được $x=\frac{1}{2}$ hoặc $y=\frac{1}{2}$ hoặc $z=\frac{1}{2}$ hay một trong ba điểm D, E, F là trung điểm của các cạnh của tam giác ABC.

Từ đó suy ra M nằm trên một trong ba đường trung tuyến của tam giác đều ABC.

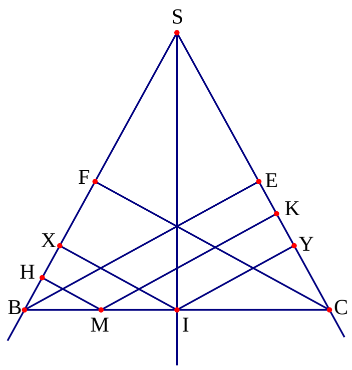
- Phần đảo: Lấy điểm M thuộc một trong ba đường trung tuyến của tam giác đều ABC.

Do mỗi đường trung tuyến là một trục đối xứng của tam giác ABC, do đó AD, BE, CF đồng quy.

- Kết luận: vậy tập hợp điểm M là một trong ba đường trung tuyến của tam giác đều ABC, không kể các điểm đầu mút.

Bài 18.

Trước ta phát biểu bổ đề: Tập hợp các điểm M nằm trong góc $\widehat{xSy}$ có tổng khỏng cách từ M đến các cạnh Sx, Sy bằng k không đổi là đoạn BC sao cho $k = d_{(B,Sy)} = d_{(C,Sx)} = 2d_{(I,Sy)} = 2d_{(B,Sx)}$, trong đó I là hình chiếu của M trên tia phân giác của góc $\widehat{xSy}$ và $d_{(I,\Delta)}$ là khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ.

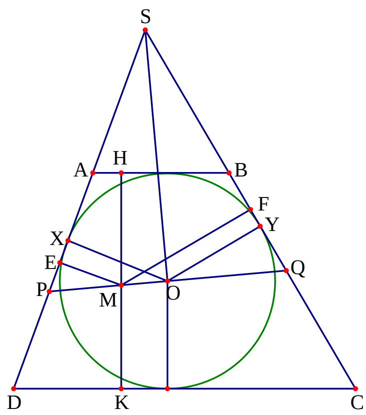


Thật vậy, xét góc $\widehat{xSy}$ và điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta cần chứng minh $MK + MH = k$ không đổi khi M chạy trên BC, với H, K là hình chiếu của M trên SB và SC

Kẻ $BE \perp SC, CF \perp SB$. Để ý là $SB = SC$.

Ta có $S_{SBC} = \frac{1}{2}BE.SC = S_{SBM} + S_{SCM} = \frac{1}{2}MH.SB + \frac{1}{2}MK.SC = \frac{1}{2}SC\left(MH + MK\right)$

Từ đó suy ra $MK + MH = BE = k$ không đổi .



Trở lại bài toán: Gọi ME, MF, MH, MK lần lượt là khoảng cách từ M đến AD, BC, AB, CD.

Từ điều kiện $AB + CD = AD + BC$ ta được tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn(O; r). Khi đó ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Tứ giác ABCD là hình thoi. Dễ thấy tập hợp điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là tất cả các điểm nằm trong(kể cả trên canh) hình thoi ABCD.

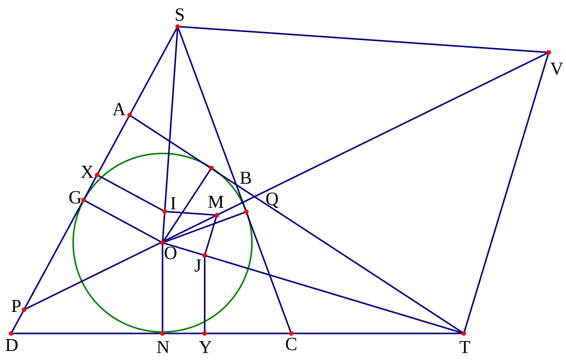
+ Trường hợp 2: Tứ giác ABCD có một cặp cạnh song song, không mất tính tổng quát ta giả sử AB//CD.

Khi đó gọi giao điểm của AD và BC là S. Kẻ MI vuông góc với SO.

Theo bổ đề trên ta được $ME + MF = MH + MK \Leftrightarrow ME + MF = 2r \Leftrightarrow 2d_{(I,DS)} = 2r$, nghĩa là hai điểm O và I trùng nhau.

Từ đó suy ra: tập hợp điểm A thỏa mãn yêu cầu bài toán là đoạn PQ với P thuộc AC và Q thuộc BC sao cho PQ vuông góc với SO tại O.

+ Trường hợp 3: Tứ giác ABCD có AB và CD cắt nhau tại T, AD và BC cắt nhau tại S.



Xét M khác O. Gọi I và J lần lượt là hình chiếu của M trên SO và TO. Gọi hình chiếu của I và J tương ứng trên AD và CD là X và Y. Từ giả thiết $ME + MF = MH + MK$ ta được

$$2d_{(I,AD)} = 2d_{(J,CD)} \Leftrightarrow d_{(I,AD)} = d_{(J,CD)} \Leftrightarrow XI = JY$$

$$\Leftrightarrow \frac{IX}{OG} = \frac{JY}{ON} \Leftrightarrow \frac{IS}{OS} = \frac{JT}{OT} \Leftrightarrow \frac{OI}{OS} = \frac{OJ}{OT} \quad (*)$$

- Phần thuận: Qua S kẻ SV vuông góc với SO, hai đường thẳng SV và MO cắt nhau tại V.

Theo định lí Talets ta được $\frac{OI}{OS} = \frac{OM}{OV}$. Từ đó ta được $\frac{OI}{OJ} = \frac{OM}{OV}$, nên theo định lia Talets đảo suy ra MJ//VT, do đó $VT \perp OT$. Giao điểm V của SV và VT là điểm cố định trên đường thẳng.

Giả sử VO cắt hai cạnh của tứ giác ABCD tại hai điểm P và Q thì tập hợp điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán chính là đoạn PQ.

- Phần đảo: Giả sử điểm M thuộc đoạn PQ được xác định như trên.. Gọi hình chiếu của M trên SO và TO lần lượt là I và J. Do sự xác định của điểm V nên ta được $\frac{OI}{OS} = \frac{OM}{OV} = \frac{OJ}{OT}$ thỏa mãn điều kiện (*)

Từ đó suy ra điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

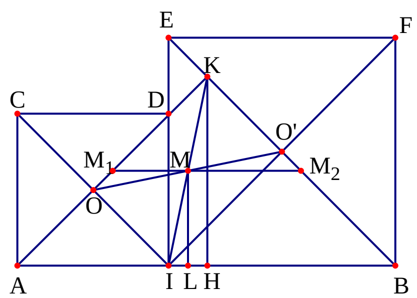
- Kết luận: Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là đoạn PQ được xác định như trên.

Bài 19.

Ta có AC và BE theo thứ tự là đường chéo của hình vuông AICD và BIEF. Nên ta được $\widehat{OAB} = \widehat{O'BA} = 45^0$.

Gọi giao điểm của tia BE và AC là K, khi đó tam giác AKB vuông cân tại K, Mà A, B cố định nên K cố định.

AC và ID là hai đường chéo của hình vuông AICD nên ta được $AC \perp ID$ tại O nên ta được $\widehat{IOK} = 90^0$.



Hoàn toàn tương tự ta được $\widehat{IO'K} = 90^0$.	

Tứ giác IOKO′ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, mà M là trung điểm của OO′ nên M là trung điểm của KI. Kẻ KH vuông góc với AB tại H và ML vuông góc với AB tại L, nên ta được ML//KH

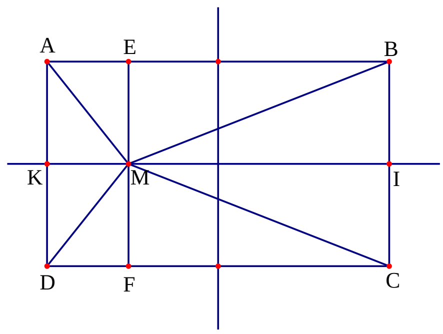
Từ đó suy ra $ML = \frac{1}{2}KH = \frac{1}{4}AB$, đặt $AB = a$ thì ta được $ML = \frac{a}{4}$ không đổi.

Như vậy M luôn cách AB một khoảng $ML = \frac{a}{4}$ không đổi nên M nằm trên đường thẳng d song song với AB và cách AB một khoảng bằng $\frac{a}{4}$ không đổi.

Gọi giao điểm của d với KA, KB theo thứ tự là $M_1; M_2$, vì I chuyển động trên AB nên khi I trùng với A thì M trùng với M_1 là trung điểm của KA, khi I trùng với B thì M trùng với M_2 là trung điểm của KA.

Vậy khi I di động trên AB thì M di động trên đường trung bình M_1M_2 của tam giác KAB

Bài 20.

a) Ta xét các trương hợp sau + Trường hợp 1: Điểm M thuộc một cạnh của hình chưa nhật ABCD, không mất tính tổng quát ta giả sử M thuộc cạnh AB. Khi đó áp dụng định lí Pitago ta có $MA^2 + MC^2 = MD^2 - AD^2 + MB^2 + BC^2 = MB^2 + MD^2$ Nếu điểm M trùng với đỉnh của hình chữ nhật ABCD, chẳng hạn trùng với đỉnh A thì ta được	

$$MA^2 + MC^2 = MC^2 = MB^2 + BC^2 = MB^2 + AD^2 = MB^2 + MD^2$$

+ Trường hợp 2: Điểm M nằm trong hình chứ nhật ABCD. Khi đó gọi E, I, K, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, BC, CD, DA. Áp dụng định lí Pitago ta được

$$MA^2 + MC^2 = AE^2 + ME^2 + MI^2 + IC^2 = \left(MI^2 + BI^2\right) + \left(ME^2 + DF^2\right) = MB^2 + MD^2$$

+ Trường hợp 3: Điểm M nằm ngoài hình chữ nhật ABCD, chứng minh hoàn toàn tương tự như trường hợp M nằm trong hình chữ nhật ABCD ta cũng được

$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

b) Theo bài ra ta có $MA+MC=MB+MD$ nên ta được $\left(MA+MC\right)^2=\left(MB+MD\right)^2$

Hay $MA^2+MC^2+2MA.MC=MB^2+MD^2+2MB.MD$

Mà theo trên ta có $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$, do đó ta được $2MA.MC=2MB.MD$

Từ đó ta được $\left(MA-MC\right)^2=\left(MB-MD\right)^2$

Suy ra ta được $MA-MC=MB-MD$ hoặc $MA-MC=MD-MB$

+ Nếu $MA-MC=MB-MD$ kết hợp với $MA+MC=MB+MD$ ta được $MA=MB$, do đoa M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

+ Nếu $MA-MC=MD-MB$ kết hợp với $MA+MC=MB+MD$ ta được $MA=MD$, do đoa M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AD.

Vậy tập hợp điểm M thảo mãn $MA+MC=MB+MD$ là hai truch đối xứng của hình chữ nhật ABCD.

Bài 21.

1. Từ MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M với A và B là tiếp điểm. Ta có tam giác MAO vuông tại A có AN vuông góc với OM

Do đó ta được $OM.ON=OA^2=r^2$ không đổi

2. a) Trên OM lấy O′ sao cho $OO'=O'M$ suy ra $OO'=O'M=O'A=O'B$ nên O′ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM.

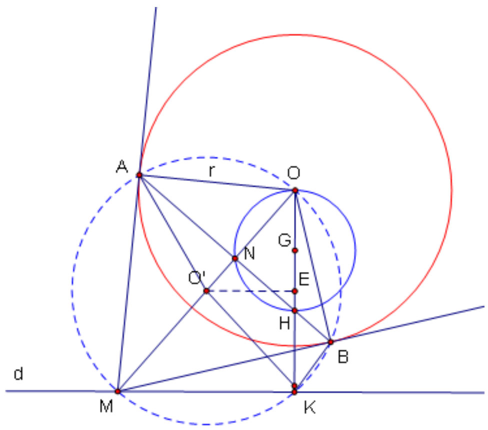
Gọi giao điểm của d và (O′) là K, khi đó ta được MK vuông góc với OK nên OK là khoảng cách từ O tới đường thẳng d, đặt $OK=h$

Ta có OK không đổi (do tâm O và đường thẳng d cố định)

Kẻ O′E//MK với E thuộc OK. Kết hợp $O'M=O'O$ và $MK\perp OK$ ta được

$O'E\perp OK$ và $EO=EK=\frac{1}{2}OK=\frac{1}{2}h$

không đổi. Từ đó suy ra tâm O′của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM thuộc đường trung trực của đoạn thẳng OK



2b) Gọi H là giao điểm của AB và OK khi đó hai tam giác ONH và OKM đồng dạng với nhau

Do đó ta được $\frac{ON}{OK}=\frac{OH}{OM}\Rightarrow OH=\frac{OM.ON}{OK}=\frac{r^2}{OK}=\frac{r^2}{h}$ không đổi

Do đó OH cố định. Từ đó suy ra N thuộc đường tròn đường kính $OH=\frac{r^2}{h}$, trừ điểm O.

Trong đó r là bán kính đường tròn (O) và h là khoảng cách từ O tới đường thẳng d

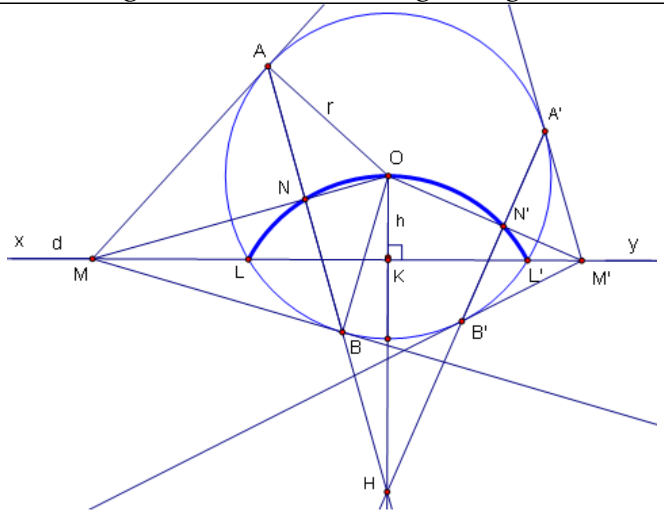
c) Khoảng cách từ d tới (O) theo bài ra $h=\frac{r}{2}$. Khi đó d cắt (O) tại L và L′. Xét hai trường hợp:

+ Khi M chuyển động trên tia Lx và L′y ta vẽ được các tiếp tuyến với (O).

+ Khi M chuyển động trên đoạn thẳng LL′ thì không vẽ được tiếp tuyến với (O) trừ điểm L, L′.

- Xét M chuyển động trên tia Lx, tương tự câu 2b ta có $OH=\frac{r^2}{h}=2r$.

Do đó điểm N chạy trên cung tròn $\overset{\frown}{ONL}$ thuộc đường tròn đường kính $OH=2r$ và trừ điểm O.

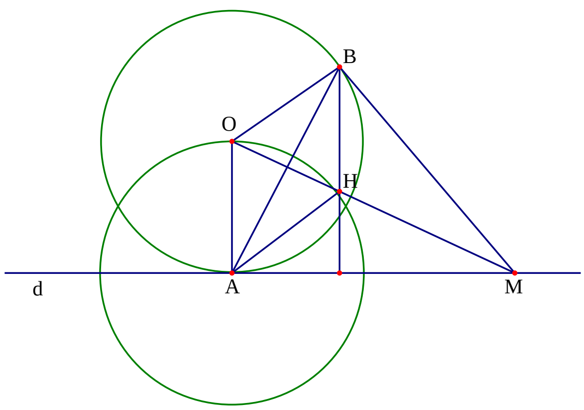


Tương tự khi M chuyển động trên tia L′y thì điểm N chạy trên cung tròn $\overset{\frown}{ON'L'}$ thuộc đường tròn đường kính $OH=2r$ làm đường kính và trừ điểm O.

Vậy khi $r=\frac{h}{2}$ và điểm M thay đổi trên d thì điểm N di chuyển trên cung tròn $\overset{\frown}{LOL'}$ thuộc đường tròn đường kính $OH=2r$, trừ điểm O.

Bài 22.

• Phần thuận: Ta có $OA\perp AM, BH\perp AM$ và $OB\perp BM, AH\perp BM$ nên suy ra OA//BH và OB//AH. Do đó tứ giác AOBH là hình bình hành. Lại có $OB=OA=R$ nên tứ giác AOBH là hình thoi. Từ đó ta được $HA=AO=R$ (không đổi). Ta có $HA=AO=R$ không đổi và A cố định. Do đó điểm M di động thì H di động theo nhưng H luôn cách A cố định một



khoảng không đổi là $HA = OA = R$. Nên
H thuộc đường tròn tâm A bán kính R.

• Giới hạn: Khi M di động trên tiếp tuyến d thì H di động trên đường tròn tâm A bán kính R

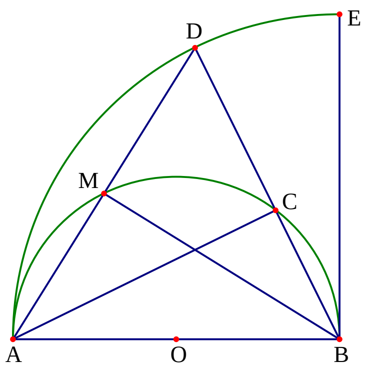
• Phần đảo: Lấy H thuộc đường tròn $(A;\ R)$, đường thẳng OH cắt d tại M, vẽ tiếp tuyến MB(B khác A).

Ta chứng minh được tứ giác AOBH là hình thoi. Do đó OA // BH và $OA \perp AM$ nên suy ra $B'H \perp AM$

Chứng minh tương tự $AH \perp BM$. Từ đó ta được H là trực tâm của tam giác AMB.

• Kết luận: Vậy khi M di động thì điểm H di động theo nhưng H luôn cách A cố định một khoảng không đổi là $HA = AO = R$. Nên quỹ tích điểm H thuộc đường tròn tâm A bán kính R.

Bài 23. • Phần thuận: Do M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AC}$ nên ta được $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MC} \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MBC}$. Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$ nên ta được $BM \perp AD$. Tam giác ABD có BM vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên là tam giác cân tại B.



Do đó ta được $BA = BD = 2R$ không đổi và B cố định

Do đó khi C di động thì D di động theo nhưng D luôn cách B cố định một khoảng không đổi là $BA = BD = 2R$. Nên D thuộc đường tròn tâm B bán kính $BA = 2R$.

• Giới hạn: Vì điểm C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính BC nên:
+ Khi C trùng với A thì D trùng với A.
+ Khi C trùng với B thì BC trở thành tiếp tuyến của đường tròn (O) ở B, khi đó D trùng với E là giao điểm của đường tròn tâm B, bán kính BA với tiếp tuyến nói trên.

Vậy D chạy trên $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm B bán kính BA (trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) là cung $\overset{\frown}{AE}$ như hình vẽ).

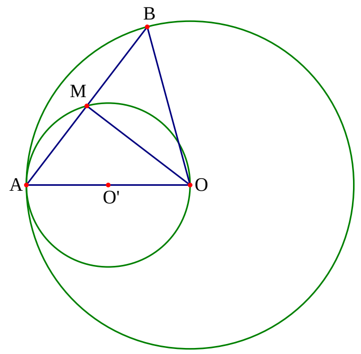
• Phần đảo: Lấy D bất kỳ thuộc cung $\overset{\frown}{AE}$. Nối DA, DB cắt nửa đường tròn (O) lần lượt tại M và C.

Ta có tam giác BAD cân tại B (vì $BA = BD = 2R$)

Mà $\widehat{BMA}=90^0$ nên ta được $BM\perp AD$. Do đó BM là đường cao đồng thời là phân giác của tam giác ABD. Từ đó ta được $\widehat{ABM}=\widehat{DBM}\Rightarrow \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MC}$. Vậy M là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AC}$.

• Kết luận: Vậy khi C di động thì D di động theo nhưng D luôn cách B cố định một khoảng không đổi là $BD=AB=2R$. Nên quỹ tích điểm D là $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm B bán kính BA (trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) là cung $\overset{\frown}{AE}$ như hình vẽ).

Bài 24. • Phần thuận: Ta có OM vuông góc với AB (đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm). Do đó $\widehat{AMO}=90^0$



Vì A, O cố định nên độ dài AO không đổi. Vậy điểm M nằm trên đường tròn tâm O′ đường kính OA (O′ là trung điểm OA) trừ điểm A.

• Phần đảo: Lấy $M\in\left(O',\frac{OA}{2}\right)$. Nối AM cắt (O) tại B.

Ta phải chứng minh M là trung điểm AB.

Thật vậy, ta có $\widehat{AMO}=90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Do đó ta được OM vuông góc với AB. Mà tam giác AOB cân tại O.

Do đó ta được OM vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến, từ đó suy ra M là trung điểm của AB.

• Kết luận: Khi B chuyển động trên (O) thì quỹ tích trung điểm M của các dây AB là đường tròn $\left(O',\frac{OA}{2}\right)$ với O′ là trung điểm của OA và không lấy điểm A

Bài 25. Bạn đọc tự vẽ hình

• Phần thuận: Ta có $\widehat{ANB}=45^0$ và AB không đổi. Do đó điểm N thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn thẳng AB.

• Giới hạn: Vẽ tia Ax vuốn góc AB, tia Ax cắt cung chứa góc 45^0 tại N′.

+ Khi $M\equiv B$ thì $N\equiv B$

+ Khi $M\equiv A$ thì $N\equiv N'$

Vậy N chạy trên cung $\overset{\frown}{N'B}$ thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn thẳng AB.

• Phần đảo: Lấy điểm N bất kì trên cung $\overset{\frown}{N'B}$, nối N với A cắt nửa đường tròn (O) ở M. Ta cần phải chứng minh MN = MB.

Thật vậy, ta có $\widehat{AMB} = 90^0$ nên tam giác BMN vuông tại M.

Mặt khác ta có $\widehat{ANB} = 45^0$ nên tam giác BMN là tam giác vuông cân tại M. Từ đó suy ra $MN = MB$.

• Kết luận: Vậy quỹ tích các điểm N là cung $\overset{\frown}{N'B}$ thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn thẳng AB

Bài 26. Bạn đọc tự vẽ hình

• Phần thuận: Vẽ $OP \perp AB$ tại O với P thuộc đường tròn (O). Nối P với D.

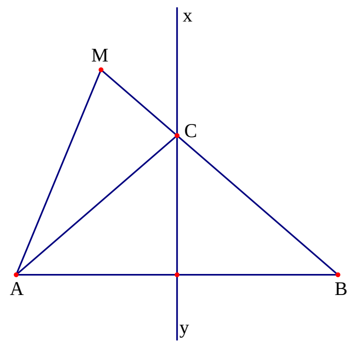
Xét hai tam giác DOP và HCO có $OD = CH$, $OP = OC$ và $\widehat{POC} = \widehat{OCH}$

Do đó ta được $\Delta DOP = \Delta HCO$, từ đó suy ra $\widehat{ODP} = \widehat{OHC} = 90^0$

Vì O, P cố định và $\widehat{ODP} = 90^0$ nên D nằm trên đường tròn đường kính OP với P là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AB}$.

• Phần đảo: Bạn đọc tự chứng minh.

Bài 27.



• Phần thuận: Gọi xy là đường trung trực của AB. Lấy điểm M bất kỳ thuộc nửa mặt phẳng chứa B bờ là xy (M không thuộc xy). Các điểm M và A thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là xy nên đường thẳng xy cắt đoạn thẳng MA ở C. Do đó $MA = MC + CA$

Ta có $CA = CB$ và $MC + CB > MB$. Từ đó suy ra $MA > MB$

Vậy điểm M nằm trên nửa mặt phẳng không chứa A bờ là đường thẳng xy (xy là trung trực của AB)

• Phần đảo: Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $M \in xy$ thì $MA = MB$.

+ Nếu M thuộc nửa mặt phẳng chứa A bờ là xy. Ta có $MA < MC + CA = MC + CB = MB$

• Kết luận: Vậy quỹ tích điểm M sao cho $MA > MB$ là nửa mặt phẳng chứa B có bờ là trung trực của AB, không kể bờ của mặt phẳng đó.

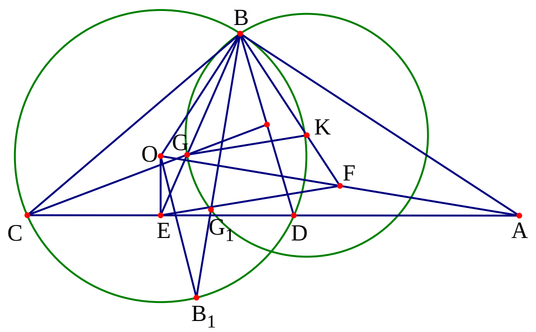
Bài 28.

• Phần thuận: Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD và OA. Khi đó do A, O cố định nên điểm F cố định.

Lấy điểm K trên đoạn BF sao cho $\frac{BK}{BF} = \frac{2}{3}$, suy ra điểm K cố định.

Trong tam giác BEF có $\frac{BG}{BE}=\frac{BK}{BF}=\frac{2}{3}$, nên ta được GK//EF, suy ra $\frac{GK}{EF}=\frac{2}{3}$

Từ đó ta được $GK=\frac{2}{3}EF$, mà ta có $EF=\frac{1}{2}OA$ nên ta được $GK=\frac{1}{3}OA$ không đổi.



Mà K là điểm cố định, do đó G thuộc đường tròn tâm K bán kính $GK=\frac{1}{3}OA$

- Giới hạn: Khi đường thẳng d tiếp đến tiếp tuyến AB thì điểm K tiến gần đến điểm B

Khi đường thẳng d tiến gần đến tiếp tuyến AB_1 thì điểm K tiến gần đến điểm G_1 với G_1 là giao điểm của AB_1 với đường tròn $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$.

Vậy điểm G thuộc cung tròn $\overset{\frown}{BG_1}$ trên đường tròn $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$, không lấy hai điểm B và G_1.

- Phần đảo: Lấy điểm K bất kì thuộc cung $\overset{\frown}{BG_1}$ trên đường tròn $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$ (không lấy hai điểm B và G_1). Khi đó ta được $GK=\frac{1}{3}OA$.

Trên tia BG lấy điểm E sao cho $\frac{BG}{BE}=\frac{2}{3}$, AE cắt đường tròn (O) tại D, C.

Trong tam giác BEF có $\frac{BG}{BE}=\frac{BK}{BF}=\frac{2}{3}$ nên ta được GK//EF.

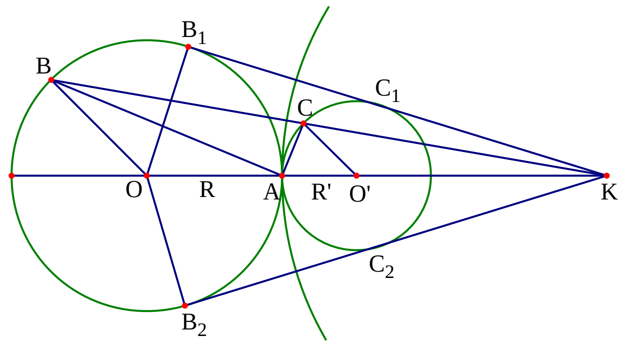
Từ đó suy ra $\frac{GK}{EF}=\frac{2}{3}\Rightarrow EF=\frac{1}{2}OA$, nên E thuộc đường tròn đường kính OA, suy ra $\widehat{OAE}=90^0$.

Do đó $OE\perp CD$ nên E là trung điểm của CD.

Tam giác BCD có BE là đường trung tuyến và $\frac{BG}{BE}=\frac{2}{3}$ nên G là trọng tâm tam giác BCD.

- Kết luận: Vậy tập hợp trọng tâm G của tam giác BCD là cung $\overset{\frown}{BG_1}$ trên đường tròn $\left(K;\frac{1}{3}OA\right)$ (không lấy hai điểm B và G_1).

Bài 29.



Gọi K là giao điểm của BC và OO′, ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc trong tại A.

Do $R > R'$ nên K thuộc tia đối của tia O′O.

Từ giả thiết cả bài ra ta có

$\widehat{CBA} + \widehat{BCA} = 90^0$ và

$\widehat{BAO} + \widehat{CAO'} = 90^0$

Do đó ta được

$$\widehat{OBC} + \widehat{BCO'} = \left(\widehat{OBA} + \widehat{CBA}\right) + \left(\widehat{BCA} + \widehat{ACO'}\right) = \left(\widehat{OAB} + \widehat{CAO'}\right) + \left(\widehat{CBA} + \widehat{BCA}\right) = 180^0$$

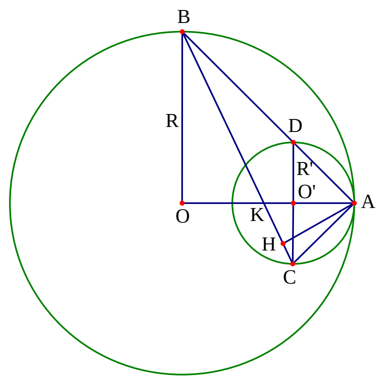
Suy ra OB và O′C song song vớ nhau, nên theo định lí Talets ta có $\dfrac{KO'}{KO} = \dfrac{CO'}{BO}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{KO'}{KO' + R + R'} = \dfrac{R'}{R} \Rightarrow KO' = \dfrac{R'(R+R')}{R-R'}$. Do đó ta được $AK = KO' + R' = \dfrac{2RR'}{R-R'}$.

Do đó điểm A và K cố định và $\widehat{AHK} = 90^0$ nên điểm H chạt trên đường tròn đường kính AK.

Để ý là do góc $\widehat{xAy}$ chỉ quay đến vị trí các góc $\widehat{B_1AC_1}$ và $\widehat{B_2AC_2}$, lúc đó B_1C_1 và B_2C_2 là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O′). Khi đó hai tiếp tuyến này cắt đường tròn đường kính AK tại D và E nên điểm H chỉ chạy trên cung $\overset{\frown}{ADE}$ của đường tròn đường kính AK.

+ Trường hợp 2: Hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc trong tại A.



Khi đó K nằm trên đoạn OO′. Tương tự như trên ta chứng minh được BO và CO′ song song với nhau.

Từ đó suy ra

$$\frac{KO'}{KO} = \frac{CO'}{BO} \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{KO'}{(R-R') - KO'}$$

$$\Rightarrow KO' = \frac{(R-R')R'}{R+R'} \Rightarrow AK = \frac{2RR'}{R+R'}$$

Mà điểm A cố định nên điểm K cố định. Mặt khác $\widehat{AHK} = 90^0$ nên điểm H chạy trên đường tròn đường kính AK cố định.

Vậy khi góc vuông $\widehat{xAy}$ quay quanh A thì điểm H luôn chạy trên đường tròn đường kính AK cố định.

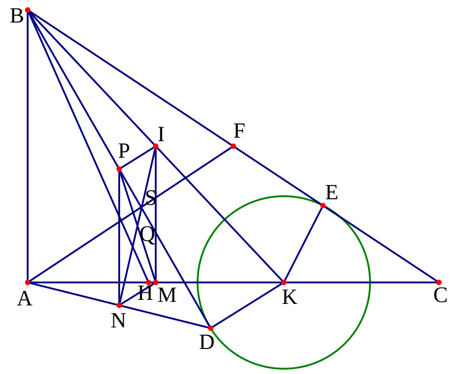
Bài 30.

+ Khi điểm K trùng với điểm A thì không tồn tại điểm S.

+ Khi điểm K trùng với điểm C thì điểm S trùng với điểm C.

+ Khi điểm K trùng với giao điểm H của AC với đường phân giác của góc B thì các điểm D, N, S trùng với điểm A.

+ Ta xét điểm K không trùng với các điểm trên và nằm trên đoạn CH, trường hợp càn lai chứng minh hoàn toàn tương tự.



Gọi I là trung điểm của BK, ta có MI và PN lần lượt là đường trung bình của tam giác ABK và ABD.

Do đó ta được $MI = PN = \frac{1}{2}AB$ và MI//PN//AB, suy ra tứ giác MIPN là hình bình hành nên trung điểm Q của đườngchéo PM cũng là trung điểm của NI. Từ đó suy ra bốn điểm Q, S, I, N thẳng hàng.

Trong tam giác vuông ABK và DBK có $IA = ID = \frac{1}{2}BK$ nên tam giác IAD cân tại I, từ đó IN là dường trung trực của đoạn thẳng AD. Vì điểm S thuộc IN nên ta giác SAD cân tại S nên ta có $\widehat{SAD} = \widehat{SDA}$.

Dễ thấy tứ giác ABKD nội tiếp đường tròn nên ta được $\widehat{ADB} = \widehat{AKB}$

Từ đó suy ra $\widehat{SAD} = \widehat{AKB}$ nên ta được $\widehat{FAC} + \widehat{KAD} = \widehat{C} + \widehat{KBE}$

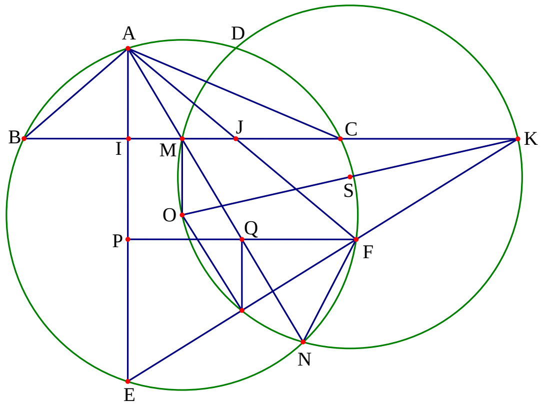
Ta lại có $\widehat{KBE} = \widehat{KBD}$ và $\widehat{KAD} = \widehat{KBD}$ nên ta được $\widehat{FAC} = \widehat{C}$, suy ra tam giác FAC cân tại F nên $FA = FC$.

Dễ thấy $\widehat{FBA} = 90^0 - \widehat{C} = \widehat{FAB}$ nên tam giác FAB cân tại F, từ đó suy ra $FA = FB$ hay F là trung điểm của BC. Vậy điểm F thuộc đường trung tuyến AF của tam giác ABC.

Để ý là tia BD và tia BA luôn nằm cùng phía đối với BC nên khi K nằm trên đoạn AH thì S nằm cùng phía với A trong nửa mặt phẳng bờ AC.

Vậy khi K di động trên AC(K khác A) thì điểm S nằm trên tia AF có chứa đường trung tuyến AF của tam giác ABC.

Bài 31.



• Phần thuận: Gọi N là giao điểm thứ hai của tia AM với đường tròn (O). Với $AB \neq AC$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $AB < AC$.

Kh đó EF không song song mà cắt BC tại K. Qua F kẻ đường thẳng song song với BC cắt AE, AN lần lượt tại P, Q. Từ đó theo định lí Talets ta có $\frac{IM}{PQ} = \frac{AM}{AQ} = \frac{MJ}{QF}$, mà ta có $IM = JM$ nên ta được $PQ = QF$ hay Q là trung điểm của PF. Hơn nữa theo giả thiết thì H là trung điểm của EF nên HQ là đường trung bình của tam giác EPF.

Do đó ta được $\widehat{QHF} = \widehat{PEF}$, mà ta lại có $\widehat{PEF} = \widehat{QNF}$ nên suy ra $\widehat{QHF} = \widehat{QNF}$.

Điều này dẫn đến tứ giác QHNF nội tiếp đường tròn, do đó ta được $\widehat{NHF} = \widehat{NQF}$

Ta lại có $\widehat{NQF} = \widehat{NMC}$ nên ta được $\widehat{NHF} = \widehat{NMC}$, suy ra tứ giác NHMR nội tiếp đường tròn.

Do M, H lần lượt là trung điểm của BC, EF nên a được $\widehat{OMK} = \widehat{OHK} = 90^0$ và tứ giác OMKH nội tiếp đường tròn.

Từ đó ta được năm điểm O, M, N, K, H cùng thuộc một đường tròn. Mà do M, N, H cố định nên đường tròn đó cố định. Khi đó giao điểm thứ hai của đường tròn đó với BC là K cũng cố định. Gọi S là trung điểm của OK, khi đó S cố định và OS không đổi. Như vậy H thuộc đường tròn tâm S bán kính OS.

• Gới hạn: Gọi D là giao điểm thứ hai của đường tròn (S) với đường tròn (O). Do H là trung điểm của dây EF nên H chỉ nằm trong đường tròn (O). Vậy tập hợp điểm H là cung tròn $\overset{\frown}{DON}$ của đường tròn (S).

- Phần đảo: Lấy điểm H_1 trên cung $\overset{\frown}{DON}$ của đường tròn (S). Gọi $E_1;F_1$ là giao điểm của H_1K với đường tròn (O)(F_1 nằm giữa K và H_1). Khi đó ta có $\widehat{OH_1K} = 90^0$ nên H_1 là trung điểm của E_1F_1.

Gọi I_1 là giao điểm của AE_1 với BC, J′ là điểm đối xứng với I_1 qua M, F′ là giao điểm thứ hai của AJ′ với đường tròn (O). Theo phần thuận ta có F', E_1, K thẳng hàng nên giao điểm thứ của KE_1 với đường tròn (O) trùng với F_1 hay H_1 là một điểm của quỹ tích đang xét.

- Kết luận: Vậy quỹ tích điểm H là cung tròn cung tròn $\overset{\frown}{DON}$ của đường tròn (S) đi qua các điểm K, N, D và tâm S được xác định như trên.